Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling 13.06.2019

1. Klausur zur Geometrie im FSS 2019, mit Lösungen

1. *(4 Punkte)*

   (a) (1P) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ affine Räume. Geben Sie an, wann eine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ *affin* ist.

   (b) (3P) Geben Sie ein Beispiel eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über dem Körper $K = \mathbb{F}_2$ an, bei dem es mehr Kollineationen als affine bijektive Abbildungen gibt. Begründen Sie das Beispiel.

   Lösung:

   (a) Eine Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ heißt *affin*, falls es eine lineare Abbildung $T(f) : T(\mathcal{A}) \to T(\mathcal{B})$ mit

   $$\forall\, x, y \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{f(x)f(y)} = T(f)(\overrightarrow{xy})$$

   gibt.

   (b) $\mathcal{A} := \mathbb{F}_2^3$. Es ist $|\mathcal{A}| = 8$, also ist die Anzahl aller Permutationen von $\mathcal{A}$ gleich $8!$. Jede Permutation ist kollinear, da jede Gerade nur aus zwei Punkten besteht. Die folgenden Argumente zeigen, dass die Anzahl aller Affinitäten kleiner ist. Daher gibt es mehr Kollineationen als Affinitäten.

   $$\begin{aligned} |Gl(3, \mathbb{F}_2)| &= (8 - 2^0)(8 - 2^1)(8 - 2^2) = 7 \cdot 6 \cdot 4, \\ |\text{Affinitäten}(\mathbb{F}_2^3)| &= |\{\text{Translationen}\}| \cdot |Gl(3, \mathbb{F}_2)| = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 4 < 8!. \end{aligned}$$

2. *(2 Punkte)* Sei V ein endlich-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum, und sei $\langle .,. \rangle$ ein Skalarprodukt auf V. Dann ist $|.| : V \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, $|\overrightarrow{a}| = \sqrt{\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle}$, eine Norm auf V.

   Das Skalarprodukt erfüllt die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung: Für alle $\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \in V$ gilt

   $$\begin{aligned} |\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle| &\leq |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}|, \\ \text{und } |\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle| &= |\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| \iff \left(\overrightarrow{a} = 0 \text{ oder } \overrightarrow{b} = 0 \text{ oder } \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{a} = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{b} \right). \end{aligned}$$

   Beweisen Sie die Dreiecksungleichung:

   $$\begin{aligned} |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| &\leq |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|, \\ \text{und } |\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}| &= |\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}| \iff \left(\overrightarrow{a} = 0 \text{ oder } \overrightarrow{b} = 0 \text{ oder } \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{a} = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{b} \right). \end{aligned}$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}|^2 &= \langle \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}, \overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} \rangle \\
&= \langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{a} \rangle + 2\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle + \langle \overrightarrow{b}, \overrightarrow{b} \rangle \\
&= |\overrightarrow{a}|^2 + 2\langle \overrightarrow{a}, \overrightarrow{b} \rangle + |\overrightarrow{b}|^2 \\
&\overset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\leq} |\overrightarrow{a}|^2 + 2|\overrightarrow{a}| \cdot |\overrightarrow{b}| + |\overrightarrow{b}|^2 = (|\overrightarrow{a}| + |\overrightarrow{b}|)^2.
\end{aligned}$$

Und

$$\begin{aligned}
& \text{Gleichheit in der Dreiecksungleichung} \\
\Longleftrightarrow\ & \text{Gleichheit in der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung} \\
\Longleftrightarrow\ & \left(\overrightarrow{a} = 0 \text{ oder } \overrightarrow{b} = 0 \text{ oder } \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{a} = \mathbb{R} \cdot \overrightarrow{b}\right).
\end{aligned}$$

3. *(4 Punkte)* Geben Sie 4 verschiedene Bedingungen dafür an, dass 2 Dreiecke kongruent sind. Bei den Bedingungen soll man nichts weglassen dürfen. Sie sollen als Gleichheit von gewissen Längen oder Winkeln formuliert sein. Machen Sie ohne Kommentar zu jeder Bedingung eine kleine, aber aussagekräftige Skizze.

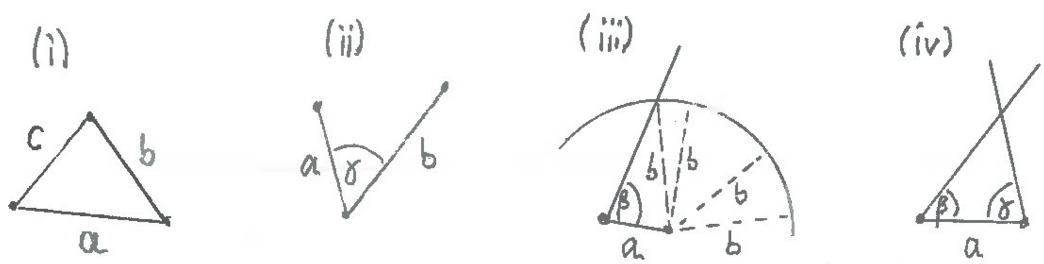
   Lösungen: Zwei Dreiecke sind kongruent, falls eine der folgenden 4 Bedingungen erfüllt ist.

   (i) Die Längen ihrer 3 Seiten stimmen paarweise überein.

   (ii) Die Längen zweier Seiten und der davon eingeschlossene Winkel stimmen überein (SWS-Satz).

   (iii) Die Längen zweier Seiten und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel stimmen überein.

   (iv) Die Länge einer Seite und die beiden daran anliegenden Winkel stimmen überein (WSW-Satz).



4. *(4 Punkte)* Es gibt sieben Klassen von Isometrien des $\mathbb{R}^3$. Geben Sie in der folgenden Tabelle ihre Namen, ihre Fixpunktmengen und die Anzahl der Parameter an.

Name	Fixpunktmenge	Anzahl der Parameter

Lösung:

Name	Fixpunktmenge	Anzahl der Parameter
id	$\mathbb{R}^3$	0
Drehung	eine Gerade	5
Spiegelung	eine Ebene	3
Drehspiegelung	ein Punkt	6
Translation	$\emptyset$	3
Gleitspiegelung	$\emptyset$	5
Schraubung	$\emptyset$	6

5. *(2 Punkte)* Die zehnte Einheitswurzel $\zeta := e^{2\pi i/10}$ erfüllt $0 = \zeta^5 + 1 = (\zeta+1)(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1)$, wegen $\zeta + 1 \neq 0$ also auch $0 = \zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1$. Und natürlich ist $\zeta + \zeta^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{10}$.

   Leiten Sie daraus eine quadratische Gleichung $x^2 + px + q = 0$ mit $p, q \in \mathbb{Q}$ ab, die von $2\cos\frac{2\pi}{10}$ erfüllt wird. Rechnen Sie damit $2\cos\frac{2\pi}{10}$ aus.

   Bemerkungen: Wegen dieser Formel kann man das regelmäßige Fünfeck mit Zirkel und Lineal konstruieren. Die Zahl $2\cos\frac{2\pi}{10}$ heißt goldener Schnitt.

Lösung:

Sei $g := 2\cos\frac{2\pi}{10} = \zeta + \zeta^{-1}$. Dann ist

$$\begin{aligned} g^2 &= (\zeta + \zeta^{-1})^2 = \zeta^2 + 2 + \zeta^{-2}, \qquad \text{also} \\ g^2 - g - 1 &= \zeta^2 - \zeta + 1 - \zeta^{-1} + \zeta^{-2} = \zeta^{-2}(\zeta^4 - \zeta^3 + \zeta^2 - \zeta + 1) = \zeta^{-2} \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

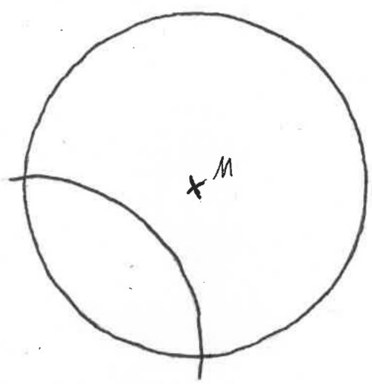
Daher ist g eine der beiden Lösungen $\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{(-1)^2 - 4(-1)}$ der quadratischen Gleichung $x^2 - x - 1$. Wegen $g > 0$ ist es die Lösung

$$g = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

6. *(1+2 Punkte)*

   (a) (1P) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche Fläche(Δ) und die Innenwinkel α, β, γ verbindet.

   (b) (2P) Der folgende Kreis soll der Rand des Kreisscheibenmodells der hyperbolischen Ebene sein. Eingetragen sind der Mittelpunkt M und eine hyperbolische Gerade G mit $M \notin G$. Skizzieren Sie hinreichend genau hinreichend viele der zu G parallelen Geraden, die durch M laufen. Ihre Skizze soll zeigen, dass Sie die Familie dieser Geraden verstehen.

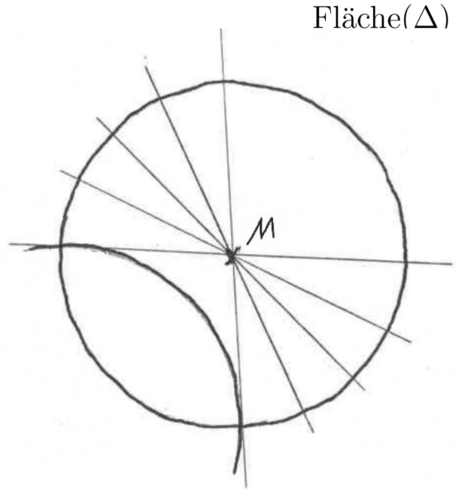


Lösung:

(a)

$$\text{Fläche}(\Delta) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma).$$

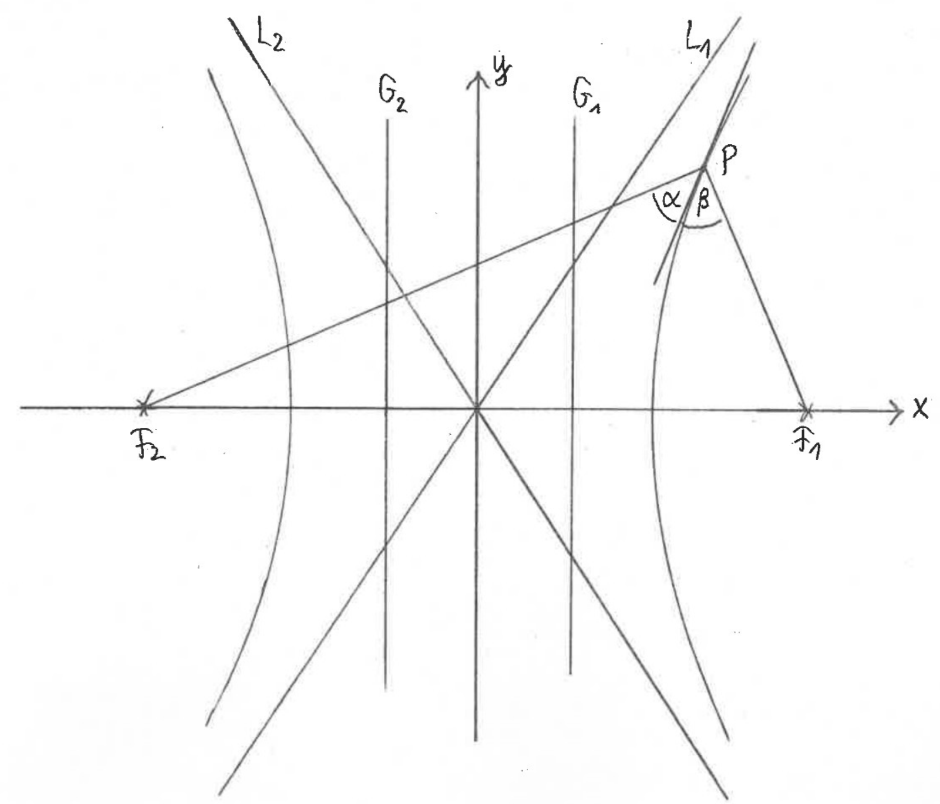
(b)



7. *(3 Punkte)* Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$. Die Hyperbel

$$\mathcal{H} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$$

in der Standardnormalform hat zwei Komponenten. Sie schmiegen sich an die Geraden $L_1 := \{(x,y) \mid \frac{x}{a} = \frac{y}{b}\}$ und $L_2 := \{(x,y) \mid \frac{x}{a} = -\frac{y}{b}\}$. Die Hyperbel hat die Brennpunkte $F_1 = (\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ und $F_2 = (-\sqrt{a^2+b^2}, 0)$ und die Leitgeraden $G_1 = \left\{\frac{a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\} \times \mathbb{R}$ und $G_2 = \left\{\frac{-a^2}{\sqrt{a^2+b^2}}\right\} \times \mathbb{R}$. Die Exzentrizität ist $\varepsilon = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} \in \mathbb{R}_{>1}$.
Die folgende Skizze zeigt $\mathcal{H}, L_1, L_2, F_1, F_2, G_1, G_2$, einen Punkt $P \in \mathcal{H}$ und zwei Winkel α und β.



Formulieren Sie die drei (in der Vorlesung so genannten) *ästhetischen Eigenschaften*.

Lösung:

(1)
$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d(P, F_i)}{d(P, G_i)} = \varepsilon\} \quad \text{für } i \in \{1, 2\}.$$

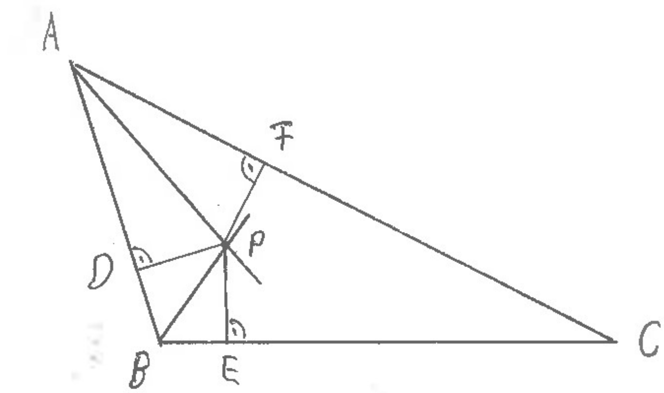
(2)
$$\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}.$$

(3) Jeder Punkt $P \in \mathcal{H}$ erfüllt $\alpha = \beta$ (α und β wie im Bild).

8. *(3 Punkte)* Satz vom Winkelhalbierendenschnittpunkt: *Die drei Halbierenden der Innenwinkel eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

Beweisen Sie diesen Satz und machen Sie eine Skizze zu Ihrem Beweis.

Lösung:



Sei P der Schnittpunkt der Winkelhalbierenden durch die Ecken A und B. Seien D, E und F die Schnittpunkte der Lote von P auf die Seiten AB, BC und CA.

Die Dreiecke $\Delta(A, F, P)$ und $\Delta(A, D, P)$ sind kongruent, denn die Winkel stimmen überein, und sie haben die Seite AP gemeinsam. Daher ist $d(D, P) = d(F, P)$.

Die Dreiecke $\Delta(B, D, P)$ und $\Delta(B, E, P)$ sind kongruent, denn die Winkel stimmen überein, und sie haben die Seite BP gemeinsam. Daher ist $d(D, P) = d(E, P)$.

Die Dreiecke $\Delta(E, C, P)$ und $\Delta(F, C, P)$ haben die Seite PC gemeinsam, es gilt $d(E, P) = d(D, P) = d(F, P)$, und der der längeren Seite gegenüberliegende Winkel ist jeweils $\pi/2$. Daher sind die Dreiecke kongruent. Daher ist die Seite PC Teil der Winkelhalbierenden durch C. Daher ist P der Schnittpunkt aller drei Winkelhalbierenden.