Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(2 Punkte)* Listen Sie die Namen aller 6 Typen von Kegelschnitten auf.
2. *(3+1 Punkte)*
   (a) Bei den Ellipsen hat man 2 Normalformen, die Standard-Normalform
   $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a > b > 0$$
   und die Kegelschnitt-Normalform
   $$y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x - p^2 = 0 \quad \text{mit } \varepsilon \in (0, 1), p > 0.$$
   Berechnen Sie ε (= die *nummerische Exzentrizität*) und p (= der *Parameter*) aus a und b.

   (b) Dito bei den Hyperbeln mit der Standard-Normalform
   $$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{mit } a > 0, b > 0$$
   und der Kegelschnitt-Normalform
   $$y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x - p^2 = 0 \quad \text{mit } \varepsilon \in (1, +\infty), p > 0.$$

   Bemerkung: Bei den Parabeln sind die Normalform $y^2 - 2px = 0$ mit $p > 0$ und die Kegelschnitt-Normalform $y^2 - 2px - p^2$ nah verwandt, hier ist $\varepsilon = -1$.
3. *(3 Punkte)* Die Ellipse $\mathcal{E} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ in der Standard-Normalform für $a > b > 0$ hat die *Brennpunkte*
   $$F_1 = (-\sqrt{a^2 - b^2}, 0) \qquad \text{und} \qquad F_2 = (\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$$
   und die *Leitgeraden*
   $$G_1 = \{\frac{-a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\} \times \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad G_2 = \{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 - b^2}}\} \times \mathbb{R}.$$
   Machen Sie eine Skizze von $\mathcal{E}$ für $a = 2, b = 1$, geben Sie die Koordinaten der Schnittpunkte mit den Koordinatenachsen an, tragen Sie F_1, F_2, einen Punkt $(x^0, y^0) \in \mathcal{E} - \{\text{Koordinatenachsen}\}$, die Strecke von F_1 nach (x^0, y^0), die Streche von (x^0, y^0) nach F_2, die Tangente $L(x^0, y^0)$ an $\mathcal{E}$ in (x^0, y^0) und 2 Winkel α und β ein, deren Gleichheit ausdrückt, dass Licht, das in F_1 startet, nach einer Reflektion an $\mathcal{E}$ nach F_2 läuft.

   Dieses Bild illustriert die folgenden drei schönen Eigenschaften einer Ellipse.

(1) Für $i = 1, 2$ gilt: Für alle Punkte $P \in \mathcal{E}$ ist das Verhältnis

$$\frac{|PF_i|}{\text{Abstand}(P, G_i)} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \text{ die Exzentrizität } \varepsilon$$

dasselbe.

(2) Bei allen Punkten $P \in \mathcal{E}$ ist die Summe $|PF_1| + |PF_2|$ der Abstände zu den Brennpunkten gleich.

(3) Ein Lichtstrahl, der in F_1 startet und irgendwo auf $\mathcal{E}$ trifft und dort gemäß der physikalischen Regel *Eintrittswinkel = Austrittswinkel* reflektiert wird, geht durch F_2. (Wegen dieser Eigenschaft heißen F_1 und F_2 Brennpunkte.)

4. *(3 Punkt)* Die Hyperbel $\mathcal{H} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1\}$ für $a > 0, b > 0$ in der Standard-Normalform hat 2 Komponenten. Sie hat die *Brennpunkte*

$$F_1 = (-\sqrt{a^2 + b^2}, 0) \qquad \text{und} \qquad F_2 = (\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$$

und die *Leitgeraden*

$$G_1 = \{\frac{-a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\} \times \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad G_2 = \{\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + b^2}}\} \times \mathbb{R}.$$

Die erfüllen die analoge Eigenschaft zu (1) oben.

(a) Machen Sie sich mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wie ungefähr die Hyperbel aussieht und wo ungefähr die Brennpunkte und die Leitgeraden liegen.

(b) Raten Sie, welche Eigenschaft (2) ersetzt.

(c) Raten Sie, welche Eigenschaft (3) ersetzt.

5. *(1+2+1+1 Punkte)* Die Parabel $\mathcal{P} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = \frac{x^2}{2p}\}$ für ein $p \in \mathbb{R}_{>0}$ hat den Brennpunkt $F = (0, \frac{p}{2})$ und die Leitgerade $G = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, y = -\frac{p}{2}\}$.

(a) Machen Sie sich mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wie ungefähr die Parabel aussieht und wo ungefähr der Brennpunkt und die Leitgerade liegen.

(b) Geben Sie eine Parametrisierung der Parabel an und zeigen Sie für jeden Punkt $P \in \mathcal{P}$ $d(P, F) = d(P, G)$. Das ist die analoge Eigenschaft zu (1) mit Exzentrizität 1.

(c) Raten Sie, welche Eigenschaft (2) ersetzt.

(d) Raten Sie, welche Eigenschaft (3) ersetzt.

6. *(3 Punkte)* Sei $C = L_1 \cup L_2 \subset \mathbb{R}^2$ die Vereinigung von zwei sich in 0 schneidenden Geraden. Die Menge C hat einen Brennpunkt und zwei Leitgeraden (der Brennpunkt bildet mit beiden Leitgeraden ein Paar).

Machen Sie sich mit einer Skizze, aber ohne Rechnung klar, wo Brennpunkt und Leitgeraden liegen. Werden (2) oder (3) durch etwas sinnvolles ersetzt?

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 6 in der Übung am 23.05.2019