Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Blatt 2
07.03.2019

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(1+1 Punkte)* Geben Sie je eine Formel für das Vektorprodukt $\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b} \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ zu $\overrightarrow{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\overrightarrow{b} = (b_1, b_2, b_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ und für das Spatprodukt $(\overrightarrow{a} \times \overrightarrow{b}) \cdot \overrightarrow{c}^t$ zu $\overrightarrow{c} = (c_1, c_2, c_3) \in M(1 \times 3, \mathbb{R})$ an.

2. *(3 Punkte)* Beweisen Sie (ohne auf den Satz 1 in Kapitel 1.1 des Buchs zu verweisen, sondern mit einem ähnlichen Beweis) die korrigierte Fassung des Satzes 3, des orientierten Strahlensatzes:

   Sind zwei Geraden G_1, G_2 mit Scheitel $G_1 \cap G_2 = \{S\}$ und zwei beliebige Geraden G_1^*, G_2^* mit den Schnittpunkten

   $$G_\alpha \cap G_1^* = \{P_\alpha\}, \quad G_\alpha \cap G_2^* = \{Q_\alpha\} \text{ für } \alpha = 1, 2$$

   gegeben, so gilt für die Teilungsverhältnisse

   $$\frac{SP_1}{SQ_1} = \frac{SP_2}{SQ_2}$$

   genau dann, wenn G_1^* und G_2^* parallel sind.

3. *(1 Punkt)* Beweisen Sie die folgende Kürzungsformel für Teilungsverhältnisse. Hier sind P_1, P_2, P_3, P_4 lauter verschiedene Punkte auf einer Geraden.

   $$\frac{P_1P_3}{P_1P_2} \cdot \frac{P_1P_4}{P_1P_3} = \frac{P_1P_4}{P_1P_2}.$$

4. *(3 Punkte)* Sei ein Dreieck $\Delta(A, B, C)$ gegeben. Beweisen Sie die Dreiecksungleichung

   $$a < b + c.$$

   Genauer: Zitieren Sie die Cauchy-Schwarzsche Ungleichung für das Skalarprodukt im Euklidischen Vektorraum $\mathbb{R}^2$, definieren Sie ausgehend vom Skalarprodukt die Standardmetrik im $\mathbb{R}^2$, und beweisen Sie, dass die Standardmetrik tatsächlich die Dreiecksungleichung erfüllt.

5. *(2+2 Punkte)*

   (a) Formulieren und beweisen Sie eine der drei Gleichungen des Kosinussatzes.

   (b) Formulieren und beweisen Sie den Sinussatz. Beim Beweis dürfen Sie den Kosinussatz benutzen ($\sim$ Beweis aus [AF15]). Sie dürfen aber auch einen direkten und wesentlich einfacheren Beweis geben.

Bitte wenden !!!

6. *(3 Punkte)* (**Satz von Sylvester und Gallei (1893 und 1944)**) Seien n Punkte in der Ebene gegeben, die nicht kollinear sind. Beweisen Sie, dass eine Gerade existiert, auf der genau zwei dieser Punkte liegen.

   Hinweis: Betrachte unter allen Paaren (P, G), bestehend aus einem der n Punkte P und einer durch mindestens zwei Punkte der Konfiguration verlaufenden Geraden G mit $P \notin G$ dasjenige Paar (P_0, G_0), für welches P_0 minimalen positiven Abstand zu G_0 hat.

7. *(2+1 Punkte)* Ein *Pythagoras-Tripel* ist ein Tripel $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ natürlicher Zahlen mit $a^2 + b^2 = c^2$. Es heißt primitiv, falls $\mathrm{ggT}\,(a, b, c) = 1$ ist. Auf der Menge aller Pythagoras-Tripel wird folgende Äquivalenzrelation $\sim_P$ eingeführt:

$$(a, b, c) \sim_P (d, e, f) \iff \exists\, q \in \mathbb{Q}_{>0} \text{ mit } (a, b, c) = (qd, qe, qf).$$

   Man sieht leicht, dass es in jeder Äquivalenzklasse von Pythagoras-Tripeln genau ein primitives Pythagoras-Tripel gibt.

   Folgende Abbildungen geben eine transparente Konstruktion aller (Äquivalenzklassen von) Pythagoras-Tripeln.

$$\begin{array}{ccccc}
\{\text{Pythagoras-Tripel}\}/\sim_P & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} & S^1 \cap \mathbb{Q}^2_{>0} & \overset{1:1}{\longleftrightarrow} &]0,1[\cap\mathbb{Q}_{>0}, \\
[(a, b, c)] & \longmapsto & \left(\frac{a}{c}, \frac{b}{c}\right) = (x, y) & \overset{f}{\longmapsto} & \frac{y}{1+x} \\
[(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)] & \longleftarrow & \left(\frac{v^2-u^2}{u^2+v^2}, \frac{2uv}{u^2+v^2}\right) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right) & \overset{g}{\longleftarrow} & \frac{u}{v} = t
\end{array}$$

   (a) Rechnen Sie nach, dass $f \circ g = \mathrm{id}$ und $g \circ f = \mathrm{id}$ ist.

   (b) Für welche $t \in]0, 1[\cap\mathbb{Q}_{>0}$ ist das Pythagoras-Tripel $(v^2 - u^2, 2uv, u^2 + v^2)$ mit $t = \frac{u}{v}$ und $\mathrm{ggT}\,(u, v) = 1$ nicht primitiv? Was ist dann der ggT der 3 Zahlen?

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 2 in der Übung am 14.03.2019