

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. (1+1+1 Punkte)

- (a) Geben Sie die Definition eines affinen Raums an.
- (b) Seien \mathcal{A} und \mathcal{B} zwei affine Räume. Geben Sie die Definition einer affinen Abbildung $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ an.
- (c) Sei \mathcal{A} ein affiner Raum, und seien $p_0, \dots, p_n \in \mathcal{A}$ Punkte des affinen Raums. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass die Punkte eine *affine Basis* bilden.

2. (3 Punkte) Beweisen Sie folgenden Satz:

Sei \mathcal{A} ein affiner Raum mit Körper K mit $\text{char } K \neq 2$, und seien \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 affine Unterräume mit $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Dann ist

$$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} a \vee b.$$

3. (1+1+1 Punkte) K^n ist in dieser Vorlesung der Spaltenvektorraum $M(n \times 1, K)$ (und nicht der Zeilenvektorraum $M(1 \times n, K)$). Eine affine Abbildung $f : K^n \rightarrow K^m$ hat die Gestalt

$$f(x) = B \cdot x + b \quad \text{mit geeigneten } B \in M(m \times n, K), b \in K^m.$$

- (a) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{m+1}$ als Produkt einer geeigneten Matrix mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$.
- (b) Sei $g : K^m \rightarrow K^l$ eine affine Abbildung mit $g(y) = C \cdot y + c$ mit $C \in M(l \times m, K)$, $c \in K^l$. Dann ist auch $g \circ f : K^n \rightarrow K^l$ eine affine Abbildung. Berechnen Sie D und d , so dass $(g \circ f)(x) = D \cdot x + d$ ist.
- (c) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} (g \circ f)(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{l+1}$ als Produkt von 2 geeigneten Matrizen mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. (2+2 Punkte) Den Hauptsatz der affinen Geometrie kann man eleganter mit dem Begriff einer *semiaffinen Abbildung* fassen:

Sei \mathcal{A} ein affiner Raum mit $\dim \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und mit $|K| \geq 3$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ genau dann eine *Kollineation*, wenn sie *semiaffin* ist.

Geben Sie zwei elegante Definitionen: Eine für eine *semilineare Abbildung* $f : V \rightarrow W$ zwischen zwei K -Vektorräumen, eine für eine *semiaffine Abbildung* $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ zwischen zwei affinen Räumen über dem gleichen Körper K .

Bitte wenden !!!

5. (1+2 Punkte) Geben Sie ein Beispiel mit $\dim \mathcal{A} = 1$ & $|K| \geq 3$ und ein Beispiel mit $\dim \mathcal{A} \geq 2$ & $|K| = 2$ an, so dass es bei beiden Beispielen mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen gibt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Prüfungsmodalitäten, Literatur) sind unter

<http://mathe6.math.uni-mannheim.de/de/studium/fss-2019/geometrie/>

zu finden.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 1 in der Übung am 21.02.2019