Spieltheorie II

2-stündige Vorlesung im FSS 2018

Mannheim

Claus Hertling

15.05.2018

Inhaltsverzeichnis

1 Faire Kuchenaufteilung

Wenn 2 hungrige Kinder einen Kuchen aufteilen wollen, ist der fairste Ansatz, dass ein Kind den Kuchen in 2 Stücke schneidet und das andere Kind dann ein Stück wählt. Das erste Kind wird, wenn es risikoavers ist, den Kuchen in 2 aus seiner Sicht gleichgute Stücke aufteilen. So kann es sich ein Stück sichern, das aus seiner Sicht $\frac{1}{2}$ des Kuchens ist. Das zweite Kind kann ein Stück mit einem (aus seiner Sicht) Wert $\geq \frac{1}{2}$ wählen. Wenn es Glück hat, hat das gewählte Stück aus seiner Sicht einen Wert $> \frac{1}{2}$. Also steht das zweite Kind potentiell besser da.
Hauptgegenstand dieses Kapitels sind Verallgemeinerungen dieses Algorithmus/Rezepts/Protokolls auf ≥ 3 Spieler und verschiedene Begriffe, was eine gute Aufteilung sein kann. Aber vorher kommen Erinnerungen an Begriffe der Maßtheorie und Existenzaussagen (die ohne Beweise).

Definition 1.1 (a) Sei K eine nichtleere Menge (der Kuchen). Eine *σ-Algebra* auf K ist eine Menge W von Teilmengen von K mit folgenden Eigenschaften:

(i) $K \in W$.

(ii) $A \in W \Rightarrow K - A \in W$.

(iii) $A_i \in W$ für $i \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i \in W$.

(b) Seien K eine nichtleere Menge und W eine σ-Algebra auf K. Ein *abzählbar additives Maß* auf W ist eine Funktion $\mu : W \to \mathbb{R}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\mu(A) \geq 0$ für alle $A \in W$.

(ii) $\mu(\emptyset) = 0$.

(iii) Falls $A_i \in W, i \in \mathbb{N}$, lauter disjunkte Teilmengen von K sind, ist

$$\mu(\bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \mu(A_i).$$

Weiter heißt ein solches μ *nicht-atomar*, falls es für jedes $A \in W$ mit $\mu(A) > 0$ ein $B \subset A$ mit $B \in W$ und $0 < \mu(B) < \mu(A)$ gibt.
Schließlich heißt ein solches μ *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(K) = 1$ ist.

(c) Eine *Partition* einer nichtleeren Menge K mit σ-Algebra W (kurz: eine Partition von (K, W)) ist ein Tupel $\mathcal{A} = (A_1, ..., A_m)$ (für ein $m \in \mathbb{N}$) von disjunkten Teilmengen von K, die alle in W liegen und $K = A_1 \cup ... \cup A_m$ erfüllen.

Definition 1.2 (a) Folgende Situation wird **Standardsituation** genannt: Gegeben sind eine nichtleere Menge K (der Kuchen), eine σ-Algebra W auf K, ein $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und n abzählbar additive nicht-atomare Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu_1, ..., \mu_n$ auf W.

(b) In der Standardsituation wird eine Partition von (K, W) mit $m = n$ eine *Aufteilung* von K genannt.

(c) Eine mögliche und hier relevante Deutung: K ist ein Kuchen, der auf n Spieler aufgeteilt werden soll. Jeder der Spieler hat seine eigene Art, Teile des Kuchens einzuschätzen (der eine mag mehr Schokolade, der andere Fruchtstücke, der dritte ein trockeneres Teil). Die Einschätzung des Spielers i wird durch das Maß μ_i von (K, W) gegeben.

Die folgenden beiden Sätze werden hier nur zitiert. Der erste ist der Spezialfall $m = 2$ des zweiten Satzes.

Theorem 1.3 *(Satz von Lyapounov, 1940) In der Standardsituation (und auch im Fall $n = 1$) ist die Menge*

$$\{(\mu_1(A), ..., \mu_n(A)) \,|\, A \in W\} \subset [0, 1]^n \subset \mathbb{R}^n$$

abgeschlossen (äquivalent: kompakt) und konvex im $\mathbb{R}^n$.

Theorem 1.4 *(Dvoretsky, Wald und Wolfowitz, 1951) In der Standardsituation (und auch im Fall $n = 1$) und für ein festes $m \in \mathbb{N}$ ist die Menge*

$$\begin{aligned}\{(\mu_i(A_j))_{i=1,...,n;j=1,...,m} \,|\, (A_1, ..., A_m) \text{ ist eine Partition von } (K, W)\} \\ \subset M(n \times m, [0, 1]) \subset M(n \times m, \mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^{n \cdot m}\end{aligned}$$

abgeschlossen (äquivalent: kompakt) und konvex in $M(n \times m, \mathbb{R})$.

Korollar 1.5 *(Satz von Neyman, 1946 (d.h. älter als Theorem 1.4)) In der Standardsituation gibt es für ein beliebiges Tupel $(p_1, ..., p_n) \in [0, 1]^n$ mit $\sum_{i=1}^n p_i = 1$ eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ von K mit $\mu_i(A_j) = p_j$ für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$.*

Beweis: (mit Theorem 1.4.) Sei

$$G := \{(\mu_i(A_j))_{i,j=1,...,n} \,|\, (A_1, ..., A_n) \text{ ist eine Aufteilung von } K.\}$$

G ist nach Theorem 1.4 konvex. Die Matrix M_j zur Aufteilung $(\emptyset, ..., \emptyset, K, \emptyset, ..., \emptyset)$ von K, die an der j-ten Stelle K stehen hat, hat in der j-ten Spalte nur Einsen und ansonsten nur Nullen. Und sie ist in G enthalten. Weil G konvex ist, ist

$$\sum_{j=1}^n p_j M_j \in G,$$

und es gibt eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} p_j M_j = (\mu_i(A_j))_{i,j=1,...,n}.$$

Eine solche Aufteilung war gesucht. □

Der Satz von Neyman sagt, dass es eine Aufteilung des Kuchens K gibt, bei der alle n Spieler jedes einzelne Kuchenstück gleich bewerten, d.h. alle bewerten das j-te Kuchenstück mit dem Wert p_j. Im Fall $p_1 = ... = p_n = \frac{1}{n}$ ist das nicht so schlecht. Keiner kann auf irgendeinen anderen neidisch sein. Aber 2 Vorbehalte:

(1) Diese Aufteilung ist eine reine Existenzaussage. Der Mensch oder die Maschine, die sie ausführt, muß alle Einschätzungen μ_i kennen. Und er muß die Existenzaussage konstruktiv machen.

(2) Wenn die Einschätzungen hinreichend verschieden sind, ist eine Aufteilung denkbar, bei der alle gewinnen, wo also jeder sein Lieblingsstück bekommt und alle nach ihrer Einschätzung mehr als einen Anteil von $\frac{1}{n}$ des Kuchens bekommen.

Definition 1.6 (a) In der Standardsituation heißt eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ von K *proportional*, falls für alle $i \in \{1, ..., n\}$ gilt:

$$\mu_i(A_i) \geq \frac{1}{n}.$$

(b) Sie heißt *neidfrei*, falls für alle $i, j \in \{1, ..., n\}$ mit $i \neq j$ gilt:

$$\mu_i(A_i) \geq \mu_i(A_j).$$

(c) Sie heißt *effizient* oder *Pareto-optimal*, falls es keine *bessere* Aufteilung gibt. Eine Aufteilung $(B_1, ..., B_n)$ heißt *besser* als die Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$, falls $\mu_i(B_i) \geq \mu_i(A_i)$ für alle i und $\mu_i(B_i) > \mu_i(A_i)$ für mindestens ein i gilt.

Lemma 1.7 *In der Standardsituation ist jede neidfreie Aufteilung von K auch proportional. Die Umkehrung gilt im Fall $n = 2$, aber nicht bei $n \geq 3$.*

Beweis: Übung. □

Wieder gibt es eine starke Existenzaussage, den folgenden Satz.

Theorem 1.8 *(Weller 1985 (?), Barbanel 2005) In der Standardsituation gibt es eine Aufteilung von K, die neidfrei und Pareto-optimal ist.*

Mehr kann man sich fast nicht wünschen. Aber nur fast: Leider ist dies eine reine Existenzaussage. Der Vorbehalt (1) oben ist auch hier gültig.
Es bleibt das Problem, welche und wie gute Aufteilungen man unter geeigneten Prämissen konstruktiv erreichen kann. Das folgende Lemma gibt mögliche Aktionen einzelner Spieler.

Lemma 1.9 *(a) In der Standardsituation sei $A \subset K$ in W mit $\mu_i(A) > 0$ für einen Spieler i, und r sei eine Zahl in $]0, \mu_i(A)[$. Dann gibt es eine Menge $B \subset A$ mit $B \in W$ und $\mu_i(B) = r$.*
Deutung: Der Spieler i kann ein Kuchenstück $A \subset K$ in zwei beliebig große Stücke schneiden.

(b) Unter den gleichen Voraussetzungen wie in (a) gibt es für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine Aufteilung von A in Mengen $(B_1, ..., B_k)$ mit $B_j \in W$ und $\mu_i(B_j) = \frac{\mu_i(A)}{k}$.
Deutung: Der Spieler i kann ein Kuchenstück $A \subset K$ in beliebig viele aus seiner Sicht gleich große Kuchenstücke schneiden.

(c) Sind $A_1, A_2 \in W$ zwei Teilmengen von A mit $\mu_i(A_1) > \mu_i(A_2)$, so gibt es ein $B \subset A_1$ mit $B \in W$ und $\mu_i(B) = \mu_i(A_2)$.
Deutung: Der Spieler i kann das Kuchenstück A_1 auf die Größe des Kuchenstücks A_2 trimmen, *d.h. er kann von A_1 so viel abschneiden, dass der Rest aus seiner Sicht gleich groß wie A_2 ist.*

Beweis: (b) und (c) folgen direkt aus (a).
(a) Die Einschränkung von W auf A ist eine σ-Algebra auf A. Die Funktion $\mu_i/\mu_i(A)$ auf $(A, W|_A)$ ist ein abzählbar additives nicht-atomares Wahrscheinlichkeitsmaß auf A. Die konvexe und abgeschlossene Menge in Theorem 1.3 ist

$$\{\mu_i(B)/\mu_i(A) \,|\, B \subset A, B \in W\}.$$

Sie enthält 0 (von $B = \emptyset$) und 1 (von $B = A$), also ist sie das Intervall $[0, 1]$. Daher gibt es ein $B \subset A$ mit $B \in W$ und $\mu_i(B) = r$. □

Nun werden die Prämissen formuliert, die beim konstruktiven Weg zu einer Aufteilung erfüllt sein sollen.

Definition 1.10 Es werden die Standardsituation und die Deutung oben mit n Spielern angesetzt. Das heißt, K ist ein Kuchen, der auf die n Spieler aufgeteilt werden soll. Weiter werden folgende **Standard-Prämissen** vorausgesetzt:

(A) Jeder Spieler will ein aus seiner Sicht (d.h. in seinem Maß μ_i) möglichst großes Stück des Kuchens erhalten.

(B) Fall (α): Jeder Spieler ist mit einem Anteil von $\frac{1}{n}$ des Kuchens zufrieden. Er interessiert sich nicht für die Stücke der anderen. Das wird durch eine proportionale Aufteilung gelöst.

Fall (β): Jeder Spieler möchte ein Kuchenstück, das aus seiner Sicht mindestens so groß ist wie irgendein anderes Stück. Ansonsten interessieren ihn die Stücke der anderen nicht. Das wird durch eine neidfreie Aufteilung gelöst.

(C) Jeder Spieler ist völlig risikoavers. Wenn er die Wahl zwischen einer Entscheidung hat, die seinen Wunsch in (B) erfüllt, und einer Entscheidung, die wahrscheinlich ein besseres Stück liefert, aber eventuell auch ein Stück, das seinen Wunsch in (B) nicht erfüllt, dann wird er die erste Entscheidung wählen.

(D) Jeder Spieler kennt nur sein eigenes Maß μ_i. Es gibt keinen Spielleiter oder Computer, der alle Maße kennt.

(E) Jeder Spieler kann (nur?) die Aktionen im Lemma 1.9 ausführen.

Nun wird ein Algorithmus gesucht, mit dem eine Aufteilung gefunden werden kann, der unter den Standard-Prämissen funktioniert und die Wünsche in den Standard-Prämissen erfüllt. Im folgenden wird statt Algorithmus der Begriff *Protokoll* gebraucht.

Definition 1.11 In der Standardsituation mit der Deutung mit n Spielern ist ein **Protokoll** eine Folge von Schritten, so dass in jedem Schritt einer der Spieler eine Wahl oder eine Teil-Aufteilung vornehmen muss und so dass folgendes gilt:

(i) Unter den Standard-Prämissen wird eine proportionale (im Fall (B) (α)) bzw. neidfreie (im Fall (B) (β)) Aufteilung erreicht.

(ii) Falls einer oder mehrere Spieler nicht völlig risikoavers handeln, so hat kein anderer Spieler einen Schaden dadurch (d.h. sein Wunsch in (B) wird immer noch erreicht), höchstens sie selber (sie können natürlich auch Glück haben).

Diese Definition ist (immer noch) nicht ganz präzis. Die Beispiele unten werden zeigen, was mit der Folge von Schritten gemeint ist.

Das Rezept bei 2 Kindern *(einer schneidet, der andere wählt)* ist ein proportionales und neidfreies Protokoll für $n = 2$ (im Sinne von Definition 1.11). Es ist uralt, mindestens über zweieinhalb tausend Jahre alt: Hesiod beschreibt in seiner Theogonie, wie Prometheus Fleisch in 2 Haufen aufteilt und Zeus dann einen von ihnen wählt.
Aber die Entwicklung von Protokollen für $n \geq 3$ begann erst 1944 mit Überlegungen von Hugo Steinhaus. Er suchte und fand ein proportionales Protokoll für $n = 3$. Seine Freunde Stefan Banach und Bronislav Knaster fanden kurz darauf ein (anderes) proportionales Protokoll für alle $n \geq 3$.

1967 erweiterte Harold Kuhn, ein Spieltheoretiker, das Protokoll von Steinhaus zu einem proportionalen Protokoll für alle $n \geq 3$.
Aber inzwischen hatten unabhängig voneinander John Selfridge und John H. Conway Anfang der 60er Jahre ein neidfreies Protokoll für $n = 3$ gefunden. Es kommt in bis zu 5 Schritten zu einer neidfreien Aufteilung. Auch die proportionalen Protokolle kommen in einer jeweils festen endlichen Zahl von Schritten zu einer proportionalen Aufteilung.
1992 fanden Steven Brams und Alan Taylor ein neidfreies Protokoll für alle $n \geq 4$. Andere neidfreie Protokolle für $n \geq 4$ wurden 1997 von Jack Robertson und William Webb und 2000 von Oleg Pikhurko gefunden. Die neidfreien Protokolle für $n \geq 4$ haben aber alle das Manko, dass sie zwar in endlich vielen Schritten zu einer neidfreien Aufteilung führen, aber dass die Anzahl dieser Schritte von den Maßen $\mu_1, ..., \mu_n$ abhängt und beliebig groß sein kann.

Problem: Gibt es ein neidfreies Protokoll für $n \geq 4$ (oder gern erstmal für $n = 4$), das in einer festen endlichen Anzahl von Schritten zu einer neidfreien Aufteilung kommt?

Alle Protokolle für $n \geq 3$ sind viel komplexer als das Protokoll *(einer schneidet, der andere wählt)* im Fall $n = 2$. Die neidfreien Protokolle für $n \geq 4$ sind so komplex, dass sie eigentlich keinen praktischen Nutzen mehr haben. Aber die Protokolle sind alle interessant. Es macht Spaß, sich mit ihnen auseinanderzusetzen. Im folgenden werden sie beschrieben. Dabei wird unterschieden, welcher Teil der Handlung in jedem Schritt dem handelnden Spieler vorgeschrieben werden kann, und welcher Strategie er in diesem Schritt folgt (also wie er die Handlung ausführen soll), wenn er tatsächlich völlig risikoavers ist.

Protokoll 1.12 (Proportionales Protokoll von Steinhaus (1944) für $n = 3$ in der Version von Kuhn (1967))

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 3 Teile. Strategie: Er sollte sie aus seiner Sicht gleich groß wählen.

2. Schritt: Spieler 2 kann aussetzen, oder er kann 2 Stücke als schlecht markieren. Strategie: Er sollte 2 Stücke als schlecht markieren, falls aus seiner Sicht 2 Stücke jeweils kleiner als $\frac{1}{3}$ sind. Sonst sollte er aussetzen.

3. Schritt: Falls Spieler 2 ausgesetzt hat, nimmt Spieler 3 ein Stück, danach Spieler 2, danach Spieler 1 (= Schritte 4 und 5), mit den offensichtlichen Strategien, dann ist man fertig. Ab jetzt betrachten wir nur noch den anderen Fall.

   Im anderen Fall hat Spieler 2 zwei Stücke als schlecht markiert. Nun kann Spieler 3 auch 2 Stücke als schlecht markieren, oder Spieler 3 kann aussetzen. Strategie: Wie im 2. Schritt (die Markierungen von Spieler 2 sind für Spieler 3 egal).

4. Schritt: Falls Spieler 3 ausgesetzt hat, nehmen die Spieler in der Reihenfolge 2, 3, 1 Stücke, mit den offensichtlichen Strategien, dann ist man fertig.

   Falls Spieler 3 nicht ausgesetzt hat, bekommt Spieler 1 das eine oder eines der beiden Stücke, die Spieler 2 und Spieler 3 als schlecht markiert hatten.

5. Schritt: Die beiden anderen Stücke werden zusammengelegt. Nun spielen die Spieler 2 und 3 das Spiel *(einer schneidet, der andere wählt)*. Dann ist man fertig.

Behauptung: Das ist ein proportionales Protokoll.

Beweis: Übung □

Protokoll 1.13 (Proportionales Protokoll von Banach und Knaster (194?) für $n \geq 2$)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet vom Kuchen ein Teil ab. Strategie: Er sollte ein Teil abschneiden, das aus seiner Sicht Größe $\frac{1}{n}$ hat.

2. Schritt: Spieler 2 bekommt das Stück und kann es direkt weiterreichen oder etwas abschneiden und das Reststück weiterreichen. Das abgeschnittene Teil wird zum Kuchen zurückgelegt. Strategie: Falls das Reststück aus seiner Sicht nur eine Größe $\leq \frac{1}{n}$ hat, soll er es direkt weiterreichen. Falls es eine Größe $> \frac{1}{n}$ hat, soll er ein Teil abschneiden, so dass der Rest Größe $\frac{1}{n}$ hat.

   ...

n. Schritt: Spieler n bekommt das Reststück und kann es direkt auf einen Tisch legen oder etwas abschneiden und das neue Reststück auf einen Tisch legen. Das abgeschnitte Teil wird zum Kuchen zurückgelegt. Strategie: Wie im 2. Schritt bei Spieler 2.

(n+1). Schritt: Falls mindestens einer der Spieler 2 bis n etwas abgeschnitten hat, bekommt der letzte Spieler, der etwas abgeschnitten hat, das Stück auf dem Tisch. Falls keiner etwas abgeschnitten hat, bekommt Spieler 1 das Stück auf dem Tisch.

Weitere Schritte: Der restliche Kuchen (mit allen abgeschnittenen Teilen) wird nun mit der gleichen Procedur auf die $n-1$ Spieler verteilt, die das Stück auf dem Tisch nicht bekommen hatten.

Behauptung: Das ist ein proportionales Protokoll.

Beweis: Übung □

Bemerkungen 1.14 (i) Schon im Fall $n = 2$ unterscheidet sich dieses Protokoll vom Protokoll *(einer schneidet, der andere wählt)*. Hier schneidet Spieler 1 und bietet Spieler 2 ein Stück an. Falls das aus Sicht von Spieler 2 von der Größe $\leq \frac{1}{2}$ ist, legt er es auf den Tisch und bekommt das andere. Falls es aus seiner Sicht $> \frac{1}{2}$ ist, schneidet er von ihm ein ε (sehr nahe an Null) ab und bekommt das Reststück.
(ii) Man kann das Protokoll von Banach und Knaster etwas abändern: Im n. Schritt bekommt Spieler n das Reststück und muß gar nichts abschneiden, sondern hat die Wahl, es zu nehmen oder auf den Tisch zu legen. Der (n+1). Schritt wird entsprechend modifiziert. Das abgeänderte Protokoll ist auch proportional. Und der Spieler n wird, wenn er das Stück haben will, nicht gezwungen, ein infinitesimal kleines Stückchen abzuschneiden, nur um das Stück zu erhalten. Im Fall $n = 2$ reduziert sich das Protokoll dann auf das klassische Protokoll *(einer schneidet, der andere wählt)*.

Das nächste proportionale Protokoll ist besonders elegant und einfach, denn man kann es für n Spieler durchführen und dann auf $n+1$ Spieler erweitern. Das ist sogar der Kern des Protokolls: Man startet mit irgendeiner proportionalen Aufteilung für n Spieler. Das Protokoll sagt, wie man daraus eine proportionale Aufteilung für $n + 1$ Spieler macht.

Protokoll 1.15 (Proportionales Protokoll von Arlington M. Fink (1964) für $n \geq 2$)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 2 Teile. Strategie: Sie sollten aus seiner Sicht gleich groß sein.

2. Schritt: Spieler 2 wählt ein Stück aus. Strategie: Er sollte ein aus seiner Sicht größtes Stück wählen.

3. Schritt: Spieler 1 und 2 schneiden ihr Stück jeweils in 3 Teile. Strategie: Sie sollten es jeweils in 3 aus ihrer Sicht gleich große Teile schneiden.

   Spieler 3 wählt von jedem der beiden Spieler 1 und 2 je 1 der 3 Teile und bekommt dieses Teil. Strategie: Er sollte ein aus seiner Sicht größtes Teil wählen.

   ...

Vor dem n. Schritt: Es liegt eine proportionale Aufteilung des ganzen Kuchens auf die Spieler 1,..., $n - 1$ vor.

n. Schritt: Jeder der Spieler 1 bis $n-1$ schneidet sein Stück jeweils in n Teile. Strategie: Jeder sollte sein Stück in n gleich große Teile schneiden.

Spieler n wählt von jedem der Spieler 1 bis $n - 1$ je 1 der n Teile und bekommt dieses Teil. Strategie: Er sollte ein aus seiner Sicht größtes Teil wählen.

Behauptung: Für jedes $k \geq 2$ hat man am Ende des k-ten Schritts eine proportionale Aufteilung des Kuchens auf die Spieler 1 bis k.

Beweis: Übung □

Im Nachhinein sind das Protokoll von Banach und Knaster und erst recht das Protokoll von Fink eleganter und einfacher als das Protokoll von Steinhaus. Proportionale Protokolle sind elegant und leicht ausführbar.
Aber neidfreie Protokolle sind viel schwieriger. Das folgende Protokoll für $n = 3$ ist immerhin noch elegant und überschaubar.

Protokoll 1.16 (Neidfreies Protokoll von Selfridge und Conway (Anfang 1960er) für $n = 3$)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in 3 Stücke. Strategie: Er sollte ihn in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke schneiden.

2. Schritt: Spieler 2 schneidet eventuell von einem Stück etwas ab oder macht nichts. Falls er etwas abschneidet, wird der Rest beiseitegelegt. Strategie: Er sollte das aus seiner Sicht größte Stück auf die Größe des aus seiner Sicht zweitgrößten Stücks trimmen.

3. Schritt: Spieler 3 und 2 und 1 nehmen in dieser Reihenfolge eines der 3 Stücke, unter folgender Regel für Spieler 2: Falls er im Schritt 2 ein Stück beschnitten hatte, muß er es nehmen, falls nicht Spieler 3 es direkt vor ihm schon genommen hatte. Strategien: Natürlich nimmt Spieler 3 ein aus seiner Sicht größtes Stück der 3 Stücke, und danach nimmt Spieler 2 ein aus seiner Sicht größtes der verbleibenden 2 Stücke, sofern er die Wahl hat und die Regel oben nicht greift.

   1. Fall: Spieler 2 hatte kein Stück beschnitten. Dann ist alles verteilt und das Protokoll stoppt.

   2. Fall: Spieler 2 hatte ein Stück beschnitten. Dann hat Spieler 3 oder Spieler 2 das beschnittene Stück genommen. Der Spieler von den Spielern 2 und 3, der das beschnittene Stück genommen hat, wird nun *Nichtschneider* genannt, der andere der Spieler 2 und 3 wird *Schneider* genannt. Spieler 1 hat in jedem Fall ein unbeschnittenes Stück genommen. Aus seiner Sicht hat er einen *uneinholbaren Vorteil* gegenüber dem Nichtschneider, denn aus seiner Sicht ist sein Stück um den beiseitegelegten Rest größer als das beschnittene Stück, das ja der Nichtschneider bekommen hat.

4. Schritt: (Nur noch im 2. Fall, sonst ist das Protokoll schon fertig.) Der Schneider schneidet den Rest in 3 Teile. Strategie: Er sollte den Rest in 3 gleich große Teile schneiden.

5. Schritt: Die Spieler nehmen in der Reihenfolge Nichtschneider - Spieler 1 - Schneider je 1 der 3 Teile. Strategien: Die Spieler Nichtschneider und Spieler 1 wählen jeweils ein aus ihrer Sicht größtes Teil.

Behauptung: Das ist ein neidfreies Protokoll.

Beweis: Details Übung. Nach dem 3. Schritt ist der Hauptteil des Kuchens verteilt, und zwar neidfrei, und darüber hinaus mit dem uneinholbaren Vorteil des Spielers 1 vor einem der Spieler 2 und 3, nämlich dem Spieler *Nichtschneider*. Daher ist für Spieler 1 egal, einen wie großen Anteil vom Rest der Nichtschneider bekommt. Daher funktioniert im 5. Schritt die Aufteilung mit Wahlen in der Reihenfolge Nichtschneider - Spieler 1 - Schneider. □

Dieses Protokoll enthält 2 wichtige Ideen, die auch beim neidfreien Protokoll von Brams und Taylor (1992) für $n \geq 4$ eingesetzt werden. Eine ist, dass ein Spieler Stücke trimmen kann, so dass danach mehrere Stücke aus seiner Sicht gleich groß und am größten sind. Die andere ist, einen uneinholbaren Vorteil für einen Spieler gegenüber einem anderen Spieler bezüglich eines noch zu verteilenden Restes zu erreichen.
Die erste Idee wird im nächsten Protokoll 1.17 für eine neidfreie Aufteilung eines Teils des Kuchens genutzt. Die zweite Idee wird im Protokoll 1.18 realisiert, allerdings auf ziemlich komplizierte Weise.

Protokoll 1.17 (Protokoll einer neidfreien teilweisen Aufteilung im Fall $n \geq 3$ von Taylor (1992?), aber hier erstmals für beliebiges n (nicht nur $n = 4$) ausgeführt)

1. Schritt: Spieler 1 schneidet den Kuchen in $2^{n-2} + 1$ Stücke. Strategie: Er sollte den Kuchen in aus seiner Sicht gleich große Stücke schneiden.

2. Schritt: Spieler 2 trimmt 0 bis 2^{n-3} Stücke. Die ganzen Reste werden beiseitegelegt. Strategie: Er soll erreichen, dass es auf jeden Fall $2^{n-3}+1$ aus seiner Sicht gleich große und größte Stücke unter den $2^{n-2} + 1$ Stücken gibt.

...

k. Schritt für $k \in \{2, ..., n-1\}$: Spieler k trimmt 0 bis 2^{n-1-k} Stücke. Strategie: Er soll erreichen, dass es auf jeden Fall $2^{n-1-k} + 1$ aus seiner Sicht gleich große und größte Stücke unter den $2^{n-2} + 1$ Stücken gibt. Die ganzen Reste werden beiseitegelegt.

...

(n-1). Schritt: Spieler $n-1$ trimmt 0 bis 1 Stück. Strategie: Er soll erreichen, dass es auf jeden Fall 2 aus seiner Sicht gleich große und größte Stücke unter den $2^{n-2}+1$ Stücken gibt. Die ganzen Reste werden beiseitegelegt.

n. Schritt: Die Spieler nehmen nun in der Reihenfolge $n, n-1, n-2, ..., 2, 1$ je eines der $2^{n-2}+1$ Stücke. Die Spieler n und 1 sind frei in ihrer Wahl. Jeder der Spieler $n-1, n-2, ..., 2$ muss dagegen folgende Regel beachten: Falls ein Stück verfügbar ist, das er getrimmt hat und das nicht weiter getrimmt worden ist, muss er so ein Stück nehmen. Falls kein solches Stück verfügbar ist, ist er frei in seiner Wahl.

Strategie: Die Spieler n und 1 wählen einfach ein für sie größtes Stück. Jeder der Spieler $n-1$ bis 2 wählt unter den von ihm getrimmten Stücken und nicht weiter getrimmten Stücken irgendeines, falls solche Stücke verfügbar sind, und ansonsten irgendein aus seiner Sicht größtes.

Behauptung: (a) Das ist ein neidfreies Protokoll für eine Aufteilung von einem Teil des Kuchens. Der Teil des Kuchens hat aus Sicht des Spielers 1 eine Größe $\geq \frac{1}{2^{n-2}+1}$.
(b) Für jedes $\varepsilon > 0$ und jedes $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left(\frac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1}\right)^N < \varepsilon$$

gibt die N-fache Wiederholung dieses Protokolls eine neidfreie Aufteilung des Kuchens bis auf einen Rest, der aus Sicht des Spielers 1 eine Größe $< \varepsilon$ hat.

Beweis: (b) folgt sofort aus (a).
(a) Für den Spieler n ist die resultierende Aufteilung sicher neidfrei. Bei jedem Spieler $k \in \{n-1, n-2, ..., 2\}$ muss gezeigt werden, dass mindestens eines der $\geq 2^{n-1-k}+1$ Stücke, die er nach seinem Trimmen als gleich große und größte im Blick hatte, weder weiter kleiner getrimmt worden ist noch von einem anderen Spieler gewählt worden ist.
Induktionsannahme: Die Spieler n bis $k+1$ haben höchstens 2^{n-1-k} Stücke durch Trimmen oder Wegnehmen für den Spieler k unmöglich gemacht.
Induktionsschritt von $k+1$ nach k: Dann ist noch mindestens eines der $\geq 2^{n-1-k}+1$ Stücke, die Spieler k nach seinem Trimmen als gleich große und größte im Blick hatte, weder weiter getrimmt worden noch von einem anderen Spieler gewählt worden. Falls sich darunter ein von ihm getrimmtes befindet, nimmt er so eins, falls nicht, nimmt er irgendeins dieser Stücke. Damit ist die Aufteilung für ihn neidfrei.
Falls Spieler k weniger als 2^{n-1-k} Stücke getrimmt hatte, hat er insgesamt höchstens 2^{n-1-k} Stücke für die später wählenden Spieler unmöglich gemacht. Mit der Induktionsannahme erhält man höchstens $2^{n-1-(k-1)}$ Stücke, die für die später wählenden Spieler unmöglich sind. Das beweist in diesem Fall die Induktionsbehauptung.

Falls Spieler k die maximale Zahl 2^{n-1-k} Stücke getrimmt hat, aber eins dieser Stücke wählt, gilt das gleiche.
Falls Spieler k die maximale Zahl 2^{n-1-k} Stücke getrimmt hat und ein ungetrimmtes Stück wählen darf und wählt, dann nur, weil die von ihm getrimmten Stücke genau die für ihn durch weiteres Trimmen oder Wegnehmen unmöglichen Stücke sind. In dem Fall erhält man insgesamt $2^{n-1-k}+1 \leq 2^{n-1-(k-1)}$ Stücke, die für die später wählenden Spieler unmöglich sind. Das beweist auch in diesem Fall die Induktionsbehauptung.
Dieser Induktionsbeweis ist bis zum Spieler $k = 1$ gültig. Damit ist bewiesen, dass die Aufteilung neidfrei ist.
Da der Spieler 1 aus seiner Sicht ein Stück der Größe $\geq \frac{1}{2^{n-2}+1}$ erhalten hat, ist aus Sicht des Spielers 1 ein Teil des Kuchens der Größe $\geq \frac{1}{2^{n-2}+1}$ verteilt worden. □

Protokoll 1.18 (Protokoll einer neidfreien teilweisen Aufteilung von Taylor (1992?) mit Vorteil für einen Spieler)
Behauptung: (a) Sei eine Aufteilung $(A_1, ..., A_n)$ des Kuchens auf n Spieler gegeben, die $\mu_2(A_2) < \mu_2(A_1)$ und $\mu_1(A_2) \geq \mu_1(A_1)$ erfüllt. Dann gibt es eine neidfreie teilweise Aufteilung $(B_1, ..., B_n)$ mit $\mu_2(B_2) > \mu_2(B_1)$, d.h. Spieler 2 sieht einen Vorteil für sich gegenüber Spieler 1.
(b) Das folgende Protokoll realisiert (a) im Fall $n = 4$.

Beweis: (a) Schwere Übung. (b) Nach dem Protokoll. □

1. Schritt: Alle $n = 4$ Spieler werden gebeten, die Stücke in eine Rangfolge nach Größe zu bringen und auch gleiche Größe von Stücken anzuzeigen. Es wird angenommen, daß Spieler 2 und Spieler 1 $\mu_2(A_1) > \mu_2(A_2)$ und $\mu_1(A_2) \geq \mu_1(A_1)$ sagen. Dann muss Spieler 2 danach eine Zahl $p \in \mathbb{N}$ nennen.

   Strategie: Alle Spieler sollten die wahre Rangfolge nennen. Spieler 2 sollte $p \in \mathbb{N}$ so groß wählen, dass gilt:

   $$\mu_2(A_1) > \frac{p+4}{p-2} \cdot \mu_2(A_2).$$

2. Schritt: Spieler 1 teilt die Stücke A_2 und A_1 in je p Stücke. Strategie: Er sollte die p Stücke von A_2 und die p Stücke von A_1 je gleich groß wählen.

3. Schritt: Spieler 2 wählt er 3 Stücke von A_2 aus, die nun s_1, s_2, s_3 genannt werden. Und entweder wählt er 3 Stücke von A_1 aus und trimmt bis zu 2 von ihnen. Dann werden die 3 Stücke t_1, t_2, t_3 genannt. Oder er schneidet eines der p Stücke von A_1 weiter in 3 Stücke, die nun t_1, t_2, t_3 genannt werden.

Strategie: Er sollte die aus seiner Sicht kleinsten 3 Stücke von A_2 auswählen. Und er sollte die aus seiner Sicht größten Stücke von A_1 wählen, falls das kleinste dieser 3 Stücke echt größer als das größte der Stücke s_1, s_2, s_3 ist. Dann sollte er bis zu 2 von ihnen trimmen, so daß die Stücke nach dem Trimmen für ihn gleich groß sind. Andernfalls sollte er das größte der p Stücke von A_1 auswählen und in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke teilen.

4. Schritt: Spieler 3 trimmt eines der 6 Stücke $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$ und legt den Rest beiseite, oder er tut nichts. Strategie: Er soll erreichen, dass es aus seiner Sicht mindestens 2 gleich große und größte Stücke gibt. Falls die beiden aus seiner Sicht größten Stücke verschieden groß sind, trimmt er das größte auf die Größe des zweitgrößten.

5. Schritt: Die Spieler wählen in der Reihenfolge 4, 3, 2 und 1 je eins der 6 Stücke $s_1, s_2, s_3, t_1, t_2, t_3$. Spieler 3 muss das getrimmte Stück nehmen, falls er eins getrimmt hat und falls Spieler 4 es nicht schon genommen hat. Spieler 2 muß eines der Stücke t_1, t_2, t_3 nehmen. Spieler 1 muß eines der Stücke s_1, s_2, s_3 nehmen.

Beweis von (b): Die p Stücke von A_1 im 2. Schritt werden $b_1, ..., b_p$ mit $\mu_2(b_1) \geq \mu_2(b_2) \geq ... \geq \mu_2(b_p)$ genannt. Es folge Spieler 2 im 3. Schritt der Strategie. Dann gilt

$$0 \leq \mu_2(s_1) \leq \mu_2(s_2) \leq \mu_2(s_3) \leq \frac{\mu_2(A_2)}{p-2}$$

und

$$\text{entweder } \mu_2(b_3) > \mu_2(s_3) \text{ oder } \mu_2(b_3) \leq \mu_2(s_3).$$

Im ersten Fall wählt er die Stücke b_1, b_2, b_3 und trimmt bis zu 2 von ihnen. Nach dem Trimmen werden die 3 dann für ihn gleich großen Stücke t_1, t_2, t_3 genannt. Im zweiten Fall teilt er b_1 in 3 aus seiner Sicht gleich große Stücke t_1, t_2, t_3. Im zweiten Fall gibt die Wahl von p alle folgenden Ungleichungen:

$$\begin{aligned} \mu_2(A_1) &> \frac{p+4}{p-2} \cdot \mu_2(A_2) \\ \Rightarrow \mu_2(b_1) + \mu_2(b_2) + (p-2)\frac{\mu_2(A_2)}{p-2} \geq \mu_2(A_1) &> (1 + \frac{6}{p-2}) \cdot \mu_2(A_2) \\ \Rightarrow 2\mu_2(b_1) &> \frac{6}{p-2} \cdot \mu_2(A_2) \geq 6\mu_2(s_3) \\ \Rightarrow \mu_2(t_1) = \mu_2(t_2) = \mu_2(t_3) = \frac{\mu_2(b_1)}{3} &> \mu_2(s_3). \end{aligned}$$

Also gilt in beiden Fällen

$$\mu_2(t_1) = \mu_2(t_2) = \mu_2(t_3) > \mu_2(s_3) \geq \mu_2(s_2) \geq \mu_2(s_1).$$

Wenn Spieler 1 der Strategie im 2. Schritt gefolgt ist, gilt außerdem

$$\mu_1(t_1) \leq \mu_1(s_3),\ \mu_1(t_2) \leq \mu_1(s_3),\ \mu_1(t_3) \leq \mu_1(s_3) = \mu_1(s_2) = \mu_1(s_1).$$

Spieler 4 wählt zuerst und ist neidfrei. Wegen des 4. Schritts ist auch Spieler 3 nach seiner Wahl neidfrei. Es bleiben sicher mindestens ein ungetrimmtes t-Stück und ein ungetrimmtes s-Stück übrig. Daher sind auch Spieler 2 und Spieler 1 nach ihren Wahlen im 5. Schritt neidfrei. □

Protokoll 1.19 (Neidfreies Protokoll von Brams und Taylor (1992) für $n \geq 4$)

1. Schritt: Spieler 1 teilt den Kuchen in n Stücke und bietet jedem der anderen Spieler ein Stück an. Strategie: Er sollte die Stücke gleich groß wählen.

2. Schritt: Falls alle Spieler 2 bis n zufrieden sind, ist das Protokoll beendet. Ab nun wird der Fall betrachtet, dass nicht alle zufrieden sind. OBdA sei Spieler 2 unzufrieden. Er hält sein Stück für kleiner als das Stück für Spieler j. Dann tauscht Spieler 1 mit Spieler j die Stücke, falls $j \neq 1$ ist.

   Nun ist man in der Situation des Protokolls 1.18 (a). Durchführung des Protokolls liefert eine neidfreie teilweise Aufteilung, bei der Spieler 2 einen Vorteil für sich gegenüber Spieler 1 sieht.

3. Schritt: Spieler 2 nennt eine Zahl N, und das Protokoll 1.17 wird N mal durchgeführt.

   Strategie: Die Zahl N sollte so groß sein, dass

   $$r \cdot \left(\frac{2^{n-2}}{2^{n-2}+1} \right)^N < \delta$$

   ist. Hier ist $r < 1$ die Größe des noch nicht verteilten Teils des Kuchens aus Sicht von Spieler 2, und $\delta > 0$ der Vorteil, den Spieler 2 für sich gegenüber Spieler 1 sieht. Dann sieht Spieler 2 nach dem 3. Schritt einen uneinholbaren Vorteil für sich vor Spieler 1. Spieler 2 wäre nicht einmal neidisch auf Spieler 1, wenn Spieler 1 den ganzen Rest des Kuchens bekommen würde.

4. Schritt: Spieler 1 teilt den Kuchen in $n!$ Teile. Jeder der anderen Spieler nennt sich einen *Zustimmer* oder einen *Ablehner*. Spieler 1 wird *Zustimmer* genannt. Strategie: Ein Spieler, der die $n!$ Teile für gleich groß hält, sollte sich Zustimmer nennen. Einer, der sie nicht für gleich groß hält, sollte sich Ablehner nennen.

5. Schritt: Es wird ein Paar (*Ablehner, Zustimmer*) gewählt, für das der Ablehner keinen uneinholbaren Vorteil für sich gegenüber dem Zustimmer sieht. Das Paar übernimmt die Rolle des Paars (Spieler 2, Spieler 1) und geht durch die Schritte 1 bis 4. Dabei stellt der Ablehner die $n!$ Stücke so zu n Stücken aus je $(n-1)!$ Stücken zusammen, daß er die n Stücke nicht alle für gleich groß hält.

6. Schritt: Der 5. Schritt wird so oft wiederholt, bis es irgendwann im 4. Schritt kein Paar (Ablehner, Zustimmer) mehr gibt, bei dem der Ablehner keinen uneinholbaren Vorteil für sich gegenüber dem Zustimmer sieht. Dann werden die $n!$ Stücke gleichmäßig auf die Zustimmer verteilt.

Behauptung: Das ist ein neidfreies Protokoll für $n \geq 4$ Spieler.

Beweis: Übung. □

Bemerkungen 1.20 (i) Die Größen δ und N im 3. Schritt von Protokoll 1.19 hängen von den Maßen μ_1 und μ_2 und der Aufteilung im 1. Schritt ab. Man kann diese Größen nicht a priori abschätzen. δ kann beliebig klein sein, und N kann beliebig groß sein. Daher hat man keine Schranke für die Anzahl der Schritte in diesem Protokoll.

(ii) Die neidfreien Protokolle von Robertson & Webb (1997) und von Pikhurko (2000) für $n \geq 4$ werden hier nicht behandelt. Sie sind konzeptionell etwas einfacher, erfordern aber viel mehr Schritte. Auch sie haben keine obere Schranke für die Anzahl der Schritte.

(iii) Das Protokoll 1.17 gibt eine neidfreie Aufteilung eines Teils des Kuchens, und durch Wiederholung kann man so den Kuchen bis auf ein $\varepsilon > 0$ neidfrei in einer bekannten Anzahl von Schritten aufteilen. Eine solche Aufteilung heißt *fast neidfrei*.
Es gibt eine interessante andere Arbeit von F.E. Su (1999), die auf andere und effiziente und elegante Weise eine *fast neidfreie Aufteilung* herstellt.

(iv) Theorem 1.8 sagt, dass neidfreie und *effiziente* (Definition 1.6 (c)) Aufteilungen existieren. Aber es ist wohl unmöglich, solche Aufteilungen mit Protokollen herzustellen. Schon das Protokoll für $n = 2$ *(einer schneidet, der andere wählt)* liefert eine zwar neidfreie, aber nicht notwendig effiziente Aufteilung.

(v) Es gibt auch Algorithmen, die nicht mit einer diskreten Menge von Schritten und Messerschnitten arbeiten, sondern mit einem bewegten Messer. Im Protokoll 1.21 wird der einfachste vorgestellt. Brams und Taylor und Koautoren haben auch dazu Arbeiten. Aber die größere Freiheit zahlt sich nicht wirklich aus. Und es ist schwerer präzisierbar, welche Arten von Schritten man erlauben will.

Aus meiner Sicht sind die Protokolle oben (mit diskreten Messerschnitten) auch als Algorithmen mit bewegtem Messer zulässig. Diese Sicht paßt aber nicht zur Behauptung von Brams und Taylor, dass die Existenz eines Algorithmus, der für $n \geq 5$ mit bewegtem Messer eine neidfreie Aufteilung gibt, ein offenes Problem ist.

Protokoll 1.21 (Proportionale Aufteilung mit einem bewegten Messer von Dubins und Spanier (1961))
Ein Messer fährt langsam von links nach rechts über einen Kastenkuchen. Der erste der n Spieler, der ruft, bekommt den Teil des Kuchens, der in diesem Moment links vom Messer ist.
Der Spieler ist raus, und der Rest des Kuchens wird auf gleiche Weise auf die anderen $n-1$ Spieler verteilt.

Behauptung: Das gibt eine proportionale Aufteilung.

Beweis: Übung. □

Hier sind 3 Bücher und 4 Originalarbeiten zur fairen Kuchenaufteilung. [BT96] und [RW98] behandeln Protokolle. [Ba05] behandelt Existenzsätze. Weitere Originalarbeiten zu den Protokollen und Existenzsätzen werden in den Büchern zitiert.

Literatur

[Ba05] J.B. Barbanel: The geometry of efficient fair division. Cambridge University Press, 2005.

[BT95] S.J. Brams, A.D. Taylor: An envy-free cake division protocol. American Mathematical Monthly **102.1** (1995), 9–18.

[BT96] S.J. Brams, A.D. Taylor: Fair division. From cake-cutting to dispute resolution. Cambridge University Press, 1996.

[Pi00] O. Pikhurko: On envy-free cake division. American Mathematical Monthly **107.8** (2000), 736–738.

[RW97] J. Robertson, W. Webb: Near exact and envy-free cake division. Ars Combinatoria **45** (1997), 97–108.

[RW98] J. Robertson, W. Webb: Cake-cutting algorithms. Be fair if you can. A K Peters, Natick, Massachusetts, 1998.

[Su99] F.E. Su: Rental harmony: Sperner's lemma in fair division. American Mathematical Monthly **106** (1999), 930–942..

2 Das Sekretärinnenproblem

Das Sekretärinnenproblem ist seit den 50er Jahren bekannt. Seitdem sind viele Varianten studiert worden. Die ursprüngliche Fassung ist folgende.

Problem 2.1 Das *Sekretärinnenproblem* ist folgendes Optimierungsproblem. Gegeben sind n Güter, die einem Spieler in beliebiger Reihenfolge präsentiert werden. Die Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist bekannt. Alle $n!$ Reihenfolgen sind gleich wahrscheinlich. Die Präsentation des r-ten Guts ist der r-te Schritt.
Die Güter habe alle unterschiedlichen Wert für den Spieler. Sobald ihm das r-te Gut präsentiert wird, kennt er das Ranking unter den ersten r Gütern, aber er weiß nichts über das Ranking der weiteren $n - r$ Güter.
Er muß nach einem Schritt das zuletzt präsentierte Gut wählen. Dann endet das Spiel. Er hat gewonnen, wenn das gewählte Gut das beste aller n Güter ist. Sonst hat er verloren. Mit welcher Strategie kann er die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen maximieren? Wie hoch ist sie dann ungefähr? Der Spieler ist risikoneutral.

Martin Gardner hat das Problem im Februar 1960 im Scientific American vorgestellt und es Fox und Marnie zugeschrieben. Eine Lösung ist im März 1960 im Scientific American skizziert und Moser und Pounder zugeschrieben. Aber schon in den 50er Jahren wurde es in Seminaren und auf Konferenzen von einigen Leuten diskutiert. Die erste in einer Zeitschrift veröffentlichte Lösung hat Lindley 1961 gegeben. Sie wird unten beschrieben. Eine andere Lösung mit Hilfe von Markov-Ketten hat Dynkin 1963 gegeben. Unten kommt eine Bemerkung zu ihr.
Seit den 70er Jahren sind sehr viele Erweiterungen des Problems studiert worden. Eine Erweiterung von F.T. Bruss (1984) wird nach der Lösung des Problems 2.1 behandelt werden.
Man kann das Problem 2.1 als ein Problem in Statistik und Wahrscheinlichkeitstheorie auffassen, aber auch als ein spieltheoretisches Problem. In jedem Fall muss und kann man elegante Ansätze wählen und kommt nur dann gut durch. Im folgenden werden zwei verwandte Ansätze vorgestellt.

Definition 2.2 Die Strategie σ_r, $r \in \{1, ..., n\}$, ist die Strategie des Spielers, die ersten $r - 1$ Güter nicht zu nehmen, und ab dem r-ten Schritt das erste Gut zu nehmen, das besser als die ersten $r - 1$ Güter ist. U_r bezeichnet die Wahrscheinlichkeit, mit dieser Strategie zu gewinnen.

Lemma 2.3

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{1}{n}, \\ U_r &= \frac{r-1}{n} \cdot \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1} \qquad \text{falls } r \geq 2 \text{ ist.} \end{aligned}$$

Beweis: Die Wahrscheinlichkeit, dass das j-te Gut das beste ist, ist $\frac{1}{n}$. Für $j = 1$ gibt das $U_1 = \frac{1}{n}$. Im folgenden steht P immer für Wahrscheinlichkeit (=**P**robability). Für $r \geq 2$ ist

$$\begin{aligned}
U_r &= \sum_{j=r}^{n} P(\text{mit } \sigma_r \text{ wird das } j\text{-te Gut gewählt und es ist das beste}) \\
&= \sum_{j=r}^{n} P(\text{das } j\text{-te Gut ist das beste}) \cdot P(\text{das beste der Güter } 1, ..., j-1 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \text{befindet sich unter den Gütern } 1, ..., r-1) \\
&= \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{n} \cdot \frac{r-1}{j-1} \\
&= \frac{r-1}{n} \sum_{j=r}^{n} \frac{1}{j-1}.
\end{aligned}$$

□

Die Werte U_r lassen sich für kleines n leicht ausrechnen. Für großes n kann man das r mit maximalem U_r leicht abschätzen. Aber das wird hier nicht getan, denn der folgende zweite Ansatz gibt einen noch eleganteren und reicheren Zugang zur Lösung und zu Abschätzungen für großes n. Er ist wohl von Lindley (1961).

Der Spieler kann sich im r-ten Schritt noch offenhalten, welche der Strategien σ_j mit $j \geq r$ er spielen will. Dann ist seine Wahrscheinlichkeit zu gewinnen

$$V_r := \max(U_j \,|\, j \geq r).$$

Theorem 2.4 *(a)*

$$V_r = \frac{r-1}{r} \cdot V_{r+1} + \frac{1}{r} \cdot \max(\frac{r}{n}, V_{r+1}).$$

(b) Es gibt ein R mit

$$V_1 = V_2 = ... = V_R > V_{R+1} > V_{R+2} > ... > V_n.$$

Es ist das maximale R mit

$$\sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \geq 1.$$

Es ist

$$\begin{aligned}
U_j &= V_j \quad \text{für } j \geq R, \\
U_j &\leq V_j \quad \text{für } j < R.
\end{aligned}$$

(c) Unter den Strategien σ_j, $j \in \{1, ..., n\}$, ist die Strategie σ_R optimal.

(d) Es ist

$$R \in (\frac{n}{e}, \frac{n}{e} + (2 - e^{-1})).$$

Das Intervall enthält 1 oder 2 natürliche Zahlen. Daher ist R dadurch (fast im Fall von 2 Zahlen) eindeutig bestimmt.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R}{n} = \frac{1}{e},$$
$$\lim_{n\to\infty} U_R = \frac{1}{e}.$$

Beweis: (a) Der erste Summand in der Formel kommt vom Fall, dass das r-te Gut unter den ersten r Gütern nicht das beste ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{r-1}{r}$. In dem Fall geht der Spieler zum $r+1$-ten Schritt.
Der zweite Summand in der Formel kommt vom Fall, dass das r-te Gut unter den ersten r Gütern das beste ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $\frac{1}{r}$. In dem Fall muß der Spieler abwägen, ob es besser ist, das Gut zu wählen oder weiterzuspielen. Die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass das r-te Gut das beste aller n Güter ist, wenn es das beste unter den ersten r Gütern ist, ist

$$\frac{P(\text{bestes aller } n \text{ Güter})}{P(\text{bestes der ersten } r \text{ Güter})} = \frac{1/n}{1/r} = \frac{r}{n}.$$

(b) Sei $R \in \{1, ..., n\}$ die maximale Zahl mit

$$\sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \geq 1.$$

Induktionsannahme: Für ein $k+1 > R$ ist

$$U_{k+1} = V_{k+1} > U_{k+2} = V_{k+2} > ... > U_n = V_n.$$

Induktionsanfang: $V_n = U_n = \frac{1}{n}$.
Induktionsschritt: Sei auch $k \geq R$. Nach Lemma 2.3 ist

$$U_{k+1} = \frac{k}{n} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1}.$$

Die folgende Rechnung benutzt dies und $V_{k+1} = U_{k+1}$ und (a).

$$\begin{aligned}
V_k &= \frac{k-1}{k} \cdot V_{k+1} + \frac{1}{k} \cdot \max(\frac{k}{n}, V_{k+1}) \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1} + \frac{1}{n} \cdot \max(1, \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1}) \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{j=k+1}^{n} \frac{1}{j-1} + \frac{1}{n} \\
&= \frac{k-1}{n} \cdot \sum_{j=k}^{n} \frac{1}{j-1} \\
&= U_k.
\end{aligned}$$

Die Rechnung zeigt auch

$$V_k > \frac{k-1}{k} \cdot V_{k+1} + \frac{1}{k} \cdot V_{k+1} = V_{k+1}.$$

Dieser Induktionsbeweis zeigt alle Behauptungen für $j \geq R$ in (b).
Wegen $\sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \geq 1$ ist $\frac{R-1}{n} \leq V_R$. Daher ist $V_{R-1} = V_R$. Induktiv folgt für $j \leq R$

$$\frac{j-1}{n} \leq V_R = V_j \quad \text{und} \quad V_{j-1} = V_j,$$

also

$$V_1 = V_2 = ... = V_R.$$

Die Ungleichung $U_j \leq V_j$ ist trivial nach der Definition von V_j.

(c) Das folgt sofort aus (b).

(d) R ist bestimmt durch

$$\sum_{j=R+1}^{n} \frac{1}{j-1} < 1 \leq \sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1}.$$

Die beiden Summen kann man durch Integrale abschätzen, indem man sie als Obersumme bzw. Untersumme eines Integrals deutet:

$$\begin{aligned}
\sum_{j=R}^{n-1} \frac{1}{j} &> \int_R^n \frac{1}{x} dx = \log n - \log R, \\
\sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j} &< \int_{R-2}^{n-1} \frac{1}{x} dx = \log(n-1) - \log(R-2).
\end{aligned}$$

Man erhält

$$\begin{aligned} & \log n - \log R < 1 < \log(n-1) - \log(R-2), \\ \text{also} \quad & \frac{n}{e} < R < \frac{n-1}{e} + 2 = \frac{n}{e} + (2 - e^{-1}). \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit, mit der Strategie σ_R zu gewinnen, ist

$$\begin{aligned} U_R &= \frac{R-1}{n} \cdot \sum_{j=R}^{n} \frac{1}{j-1} \\ &\approx \frac{R-1}{n} \approx \frac{1}{e} \quad \text{für großes } n. \qquad \square \end{aligned}$$

Bemerkungen 2.5 (i) $U_R \approx \frac{1}{e}$ für großes n finde ich erstaunlich hoch. Und das optimale R läßt sich erstaunlich leicht charakterisieren und bestimmen.

(ii) Dynkin (1963) hat das Sekretärinnenproblem als ein Markov-Ketten-Stop-Problem gedeutet und auf diese Weise gelöst. Seine Lösung umfaßte die Aussage, dass das Problem in einer präzisierbaren Weise *monoton* ist, und daraus konnte er schließen, dass die Strategie σ_R nicht nur im Vergleich zu den anderen Strategien σ_r optimal ist, sondern dass sie unter allen Strategien optimal ist. Das ist stärker als Theorem 2.4 (c).

(iii) Das Sekretärinnenproblem hat viele Varianten. Im folgenden sollen eine Variante von F.T. Bruss und seine Lösung vorgestellt werden. Das erfordert noch einige Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie, an die im folgenden erinnert wird.

Definition/Lemma 2.6 (a) Sei Ω eine nichtleere Menge, $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra auf Ω und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{A}$ (siehe Definition 1.1). Dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *Wahrscheinlichkeitsraum*, die Elemente von $\mathcal{A}$ sind die möglichen Ereignisse, und der Wert $P(A) \in [0,1]$ für ein $A \in \mathcal{A}$ ist seine *Wahrscheinlichkeit*.

(b) (Lemma) Zur Menge $\mathbb{R}$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subset \mathcal{P}(\mathbb{R})$, die alle (offenen, halboffenen, geschlossenen) Intervalle enthält.
Zu jedem Intervall $[a,b] \subset \mathbb{R}$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\mathcal{B}([a,b])$, die alle Teilintervalle enthält.
(Definition) $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und $\mathcal{B}([a,b])$ heißen *Borel-σ-Algebren*, ihre Elemente heißen *Borelmengen*.

(c) (Lemma) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, und sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Abbildung. Falls für alle $x \in \mathbb{R}$ die Menge $X^{-1}((-\infty, x)) \in \mathcal{A}$ ist, ist für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Menge $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.
(Definition) Eine solche Abbildung X heißt *Zufallsvariable* (insbesondere ist sie *meßbar*).

(d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine Zufallsvariable. Die *Verteilung* von X ist die Abbildung

$$P_X : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], \quad B \mapsto P(X^{-1}(B)).$$

Die *Verteilungsfunktion* von X ist die Abbildung

$$F_X : \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto P_X((-\infty, x)).$$

F_X ist eine monoton wachsende Funktion.

Problem 2.7 (Die Variante zum Sekretärinnenproblem von Bruss (1984))
(a) Gegeben ist eine im allgemeinen unbekannte Anzahl N von Gütern, die einem Spieler zu unbekannten verschiedenen Zeiten Z_i, $i = 1, ..., N$, innerhalb eines Zeitintervalls $[0, T]$ präsentiert werden. Alle $N!$ Reihenfolgen sind gleich wahrscheinlich.
Die Güter haben alle unterschiedlichen Wert für den Spieler. Sobald ihm das r-te Gut präsentiert wird, kennt er das Ranking unter den ersten r Gütern, aber er weiß nichts über das Ranking der weiteren $N - r$ Güter.
Er muß zu irgendeinem Zeitpunkt das zuletzt präsentierte Gut wählen. Dann endet das Spiel. Er hat gewonnen, wenn das gewählte Gut das beste aller N Güter ist. Sonst hat er verloren. Mit welcher Strategie kann er die Wahrscheinlichkeit zu gewinnen maximieren? Wie hoch ist sie dann ungefähr? Der Spieler ist risikoneutral.
(b) Die im allgemeinen unbekannte Anzahl N wird folgendermaßen modelliert: Auf der Menge $\mathbb{N}$ und der σ-Algebra $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ liegt ein im allgemeinen unbekanntes Wahrscheinlichkeitsmaß $g : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to [0,1]$ vor. Dann ist $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}), g)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Die Zufallsvariable N ist einfach die Abbildung $N = \mathrm{id} : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \subset \mathbb{R}$.
Die Zeiten Z_i werden folgendermaßen modelliert: Auf dem Wahrscheinlichkeitsraum $([0,T], \mathcal{B}([0,T]), \mu)$, wo μ das Standardmaß ist, das die Längen von Intervallen misst und durch T teilt, sind Z_i lauter Zufallsvariablen, die alle die gleiche stetige Verteilungsfunktion $F : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $F(y) = 0$ für $y \le 0$ und $F(y) = 1$ für $y \ge T$ haben.

Bemerkungen 2.8 (i) Dadurch, dass F stetig ist, ist sichergestellt, dass die Wahrscheinlichkeit dafür, dass zwei Güter zugleich ankommen, 0 ist.
Dadurch, dass alle Ankunftszeiten Z_i die gleiche Verteilungsfunktion F haben, ist gewährleistet, dass alle Reihenfolgen gleich wahrscheinlich sind.

(ii) Bemerkung: Die Anzahl N und ihr Wahrscheinlichkeitsmaß sind *im allgemeinen* unbekannt, weil sie manchmal doch als bekannt oder teilweise bekannt angesetzt werden: In Theorem 2.10 wird g als bekannt angesetzt (aber im Korollar 2.11 nicht mehr). Insbesondere wird der Fall $N = n$ mit einem bekannten $n \in \mathbb{N}$ betrachtet, und auch der Fall $N \ge n$ mit einem bekannten $n \in \mathbb{N}$. Im ersten Fall ist also $P(N = n) = g(\{n\}) = 1, P(N \neq n) = g(\mathbb{N} - \{n\}) = 0$. Im zweiten Fall ist $P(N < n) = g(\{1, ..., n-1\}) = 0$.

Definition 2.9 (a) Beim Problem 2.7 bezeichnet $\rho_{x,r}$ mit $x \in [0,T]$ und $r \in \mathbb{N}$ folgende Strategie: Der Spieler läßt alle Güter bis zum Zeitpunkt x passieren und nimmt ihre Werte wahr. Dann wählt er unter den Gütern, die nach dem Zeitpunkt x kommen und einen höheren Wert als alle (jeweils) vorherigen Güter haben, das r-te Gut, falls so eins noch kommt. Falls kein solches bis zum Zeitpunkt T gekommen ist, nimmt er zum Zeitpunkt T das zuletzt gekommene Gut.
Die Strategie $\rho_{x,1}$ wird auch mit ρ_x bezeichnet. (Gleich werden hauptsächlich die Strategien ρ_x studiert.)
(b) Im Spezialfall $[0,T] = [0,1],\ F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$, bezeichnet

$$p_n(x) := P(\text{die Strategie } \rho_x \text{ ist erfolgreich} \,|\, N = n)$$

die Wahrscheinlichkeit, dass die Strategie ρ_x im Fall $N = n$ mit bekanntem $n \in \mathbb{N}$ erfolgreich ist.

Teil (b) dieser Definition ist dadurch motiviert, dass der allgemeine Fall sich leicht auf den Spezialfall $[0,T] = [0,1],\ F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ reduzieren läßt und dass die Zufallsvariable N mit beliebiger Verteilung g sich aus den Spezialfällen $N = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ zusammensetzt. Das wird der Beweis des folgenden Satzes zeigen. Teil (a) des Satzes betrifft das allgemeine Problem 2.7, Teil (b) den Spezialfall $([0,T] = [0,1], F|_{[0,1]} = \mathrm{id}, N = n)$ im Teil (b) der Definition 2.9.

Theorem 2.10 *(Bruss 1984) (a) (i) Im Problem 2.7 gibt es bei bekannter Verteilung g der Anzahl N und bekannter Verteilungsfunktion F der Ankunftszeitpunkte Z_i der Güter einen Zeitpunkt $z^* \in [0,T]$, so dass unter den Strategien ρ_x keine besser als die Strategie ρ_{z^*} ist. z^* erfüllt $z^* < e_F^{-1}$, wobei $e_F^{-1} := \inf(z \,|\, F(z) = e^{-1})$ ist.*
(ii) Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein n_0, so dass für jedes g mit $P(N < n_0) = 0$ gilt:

$$z^* \in [e_F^{-1} - \varepsilon, e_F^{-1}).$$

(b) Im Spezialfall $[0,T] = [0,1],\ F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ und $N = n$ ist

$$p_n(x) = \frac{1}{n}(1-x)^n + x \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k.$$

Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Funktionen $p_n : [0,1] \to [0,1]$ ist monoton fallend und konvergiert gleichmäßig gegen die Funktion p_∞ mit $p_\infty(x) := -x \log x$.
Jede Funktion p_n nimmt ihr Maximum an einem eindeutigen Punkt $x_n \in [0, e^{-1})$ an. Insbesondere ist $x_1 = x_2 = 0 < x_3$. Die Funktion p_∞ nimmt ihr Maximum am eindeutigen Punkt e^{-1} an, der Wert ist $p_\infty(e^{-1}) = e^{-1}$. Die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Punkte der Maxima ist monoton steigend und konvergiert gegen e^{-1}.

Beweis: (a) wird nach (b) bewiesen.
(b) Sei $N = n$ mit $n \in \mathbb{N}$ fest. $p_n(x)$ für ein $x \in [0,1]$ ist die Summe über alle $k \in \{1, ..., n-1\}$ für die Wahrscheinlichkeit, dass in der Bestenliste das $(k+1)$-te Gut im Zeitraum $[0,x]$ ankommt, dass die k besten im Zeitraum $[x,1]$ ankommen, und dass unter diesen das beste zuerst ankommt, plus der Wahrscheinlichkeit, dass alle n Güter im Zeitraum $[x,1]$ ankommen, und unter ihnen das beste zuerst.
Für irgendein Gut ist die Wahrscheinlichkeit, im Zeitraum $[0,x]$ anzukommen, gleich x und die Wahrscheinlichkeit, im Zeitraum $[x,1]$ anzukommen, gleich $1-x$. Wenn man schon weiß, dass die k besten im Zeitraum $[x,1]$ ankommen, ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass irgendein bestimmtes von ihnen (zum Beispiel das beste) als erstes ankommt, gleich $\frac{1}{k}$. Daher ist

$$p_n(x) = x \cdot \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k + \frac{1}{n}(1-x)^n.$$

Es ist

$$\begin{aligned} p_n(x) - p_{n+1}(x) &= -x \cdot \frac{1}{n}(1-x)^n + \frac{1}{n}(1-x)^n - \frac{1}{n+1}(1-x)^{n+1} \\ &= \frac{1}{n(n+1)}(1-x)^{n+1} > 0 \qquad \text{für } x \in [0,1). \end{aligned}$$

Daher ist die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend auf $[0,1)$ und konstant in $x=1$. Weil die Summe ohne den Vorfaktor x ein Anfang der Taylorentwicklung der Funktion $-\log x$ ist, und wegen des Vorfaktors x, konvergiert die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig gegen p_∞.
Es ist

$$\begin{aligned} p_n'(x) &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k + x\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^{k-1}(-1) - (1-x)^{n-1} \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k - x \cdot \frac{1-(1-x)^{n-1}}{1-(1-x)} - (1-x)^{n-1} \\ &= -1 + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}(1-x)^k, \end{aligned}$$

also insbesondere $p_2'(0) = 0$, $p_n'(0) > 0$ für $n \geq 3$, $p_n'(1) = -1 < 0$. Es ist

$$\begin{aligned} p_n'' &= -\sum_{k=1}^{n-1}(1-x)^{k-1} \\ &= -\frac{1-(1-x)^{n-1}}{x} \qquad \text{für } x \in (0,1] \text{ und } n \geq 2 \\ &< 0 \qquad \text{für } x \in [0,1] \text{ und } n \geq 2. \end{aligned}$$

Daher hat p_n auf $[0,1]$ sein Maximum an einem eindeutigen Punkt $x_n \in [0,1)$, und das ist für $n \geq 2$ der eindeutige Punkt x_n mit $p_n'(x_n) = 0$. Offenbar ist $x_1 = x_2 = 0$. Wegen $p_n'(0) > 0$ für $n \geq 3$ ist $x_3 > 0$. Aus der Formel für $p_n'(x)$ folgt, dass die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ab $n = 2$ streng monoton wachsend ist. Sie konvergiert gegen e^{-1}, den Punkt, wo p_∞ sein Maximum annimmt:

$$\begin{aligned} p_\infty'(x) &= -\log x - 1, \quad p_\infty'(e^{-1}) = 0, \\ p_\infty''(x) &= -\frac{1}{x} < 0 \quad \text{für } x > 0, \\ p_\infty(e^{-1}) &= -e^{-1}\log e^{-1} = e^{-1}. \end{aligned}$$

Daher sind alle $x_n \in [0, e^{-1})$.

(a) Die Reduktion von beliebigem $[0,T]\&F$ auf $[0,1]\&F_{neu}|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ ist ziemlich trivial. Man nennt die alte Zeitkoordinate $z \in [0,T]$ und setzt als neue Zeitkoordinate

$$x := F(z) \in [0,1]$$

an. Dann wird das Zeitintervall $[0,1]$, und die neue Verteilungsfunktion wird $F_{neu} = \mathrm{id}$.
Sei

$$G(x) := \sum_{n=1}^\infty p_n(x) \cdot P(N = n).$$

Dann ist $G(x)$ die Wahrscheinlichkeit, im Fall $[0,1]\&F_{neu}$ mit der Strategie ρ_x zu gewinnen.
Wegen $\sum_{n=1}^\infty P(N = n) = 1$, und weil die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen p_∞ konvergiert, ist G stetig
Daher existiert ein optimales x^*, nämlich das minimale x^* mit $G(x^*)$ maximal. Weil die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (für $n \geq 2$ streng) monoton wachsend mit Limes e^{-1} ist, ist $x^* < e^{-1}$. Im Fall $N \geq m$ folgt zusätzlich $x^* \geq x_m$, also $x^* \in [x_m, e^{-1})$. Für $m \to \infty$ konvergieren x_m und dieses Intervall gegen den Punkt e^{-1}.
Wenn man wieder zu beliebigen $[0,T]\&F$ zurückgeht und das x^* in ein z^* umrechnet, erhält man im Fall $N \geq m$

$$z^* \in [z_{m,F}^{-1}, e_F^{-1}) \quad \text{mit } z_{m,F}^{-1} := \inf(z \,|\, F(z) = x_m),$$

und es gilt

$$e_F^{-1} - z_{m,F}^{-1} \to 0 \quad \text{für } m \to \infty.$$

□

Teil (a)(i) des Satzes sieht bis auf die Abschätzung $z^* < e_F^{-1}$ ziemlich trivial aus, Teil (a)(ii) ist etwas feinsinnig, Teil (b) ist das technische Herz des Satzes. Aber die wirklich hübschen Folgerungen kommen nun.

Korollar 2.11 *(a) Die Strategie $\rho_{e_F^{-1}}$ hat für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung g der Zufallsvariablen N eine Erfolgswahrscheinlichkeit $> e^{-1}$.*
(b) Im Fall $P(N = n) = 1$ ist

$$e^{-1} \;=\; p_\infty(e^{-1}) < p_n(e^{-1}) < p_n(x_n) \leq U_R.$$

also ist $U_R > e^{-1}$. Das ergänzt Theorem 2.4.

(c) Unter allen Strategien $\rho_{x,r}$ ist $\rho_{e_F^{-1}}$ die einzige, die für jede Wahrscheinlichkeitsverteilung g von N eine Erfolgswahrscheinlichkeit $> e^{-1}$ hat.

Beweis: (a) Die Erfolgswahrscheinlichkeit der Strategie ρ_z ist laut Beweis von Satz 2.10 (a) gleich $G(F(z))$. Insbesondere ist

$$\begin{aligned} G(e^{-1}) &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n(e^{-1}) \cdot P(N = n) \\ &> \sum_{n=1}^{\infty} p_\infty(e^{-1}) \cdot P(N = n) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-1} \cdot P(N = n) = e^{-1}. \end{aligned}$$

(b) Die erste Ungleichung folgt daraus, dass die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen streng monoton fallend auf $[0, 1)$ ist. Die zweite Ungleichung folgt daraus, dass p_n sein Maximum nur in x_n annimmt. Die dritte und letzte Ungleichung folgt daraus, dass nach Bemerkung 2.5 (ii) im Fall $N = n$ die Strategie σ_R (mit Erfolgswahrscheinlichkeit U_R) unter allen Strategien die beste ist.
(c) Zuerst wird $\rho_{e_F^{-1}}$ mit einer Strategie ρ_z mit $z \neq e_F^{-1}$ verglichen. $z \neq e_F^{-1}$ wird schlechter als e_F^{-1}, falls die Zufallsvariable N die Ungleichung $N \geq m$ für ein genügend großes m erfüllt, denn dann ist $z \neq z^*$ und z^* ist sehr nahe an e_F^{-1}, und die Erfolgswahrscheinlichkeiten von ρ_{z^*} und $\rho_{e_F^{-1}}$ sind nahe beieinander und größer als die von ρ_z.
Nun wird $\rho_{e_F^{-1}}$ mit anderen Strategien $\rho_{z,r}$ mit $r \geq 2$ verglichen: $\rho_{z,r}$ hat Erfolgswahrscheinlichkeit $= 0$, falls die Zufallsvariable N die Ungleichung $N < r$ erfüllt. □

Bemerkungen 2.12 (i) Theorem 2.10 (a) ist je nachdem, wie man es liest, erhellend oder irreführend. Die Existenz der optimalen Stopp-Zeit z^* ist gut, aber z^* ist schwer zu bestimmen. Wichtiger ist, dass z^* oft nahe an der Stopp-Zeit e_F^{-1} ist, und die ist oft nicht so schwer abzuschätzen. Korollar 2.11 (a)+(c) zeigt, dass man mit dieser bei jeder möglichen Verteilung der Zufallsvariablen N ziemlich gut liegt. Dass die Stopp-Zeit e_F^{-1} immer (bei beliebiger Verteilung von N) so gut ist, ist die wichtigste Konsequenz aus Theorem 2.10 und Korollar 2.11. Daher kann man sich oft die Berechnung des genauen Wertes z^* sparen.

(ii) Die folgende Tabelle aus [Br84] illustriert (i) im Fall $N = n$. Die Zeilen mit R und U_R stehen nicht in [Br84].

$N = n$	1	2	3	5	10	15	$\to \infty$
R	1	2	2	3	4	6	
U_R	1	$0,5$	$0,5$	$0,4333$	$0,3987$	$0,3894$	e^{-1}
x_n	0	0	$0,2679$	$0,3489$	$0,3670$	$0,3678$	e^{-1}
$p_n(x_n)$	1	$0,5$	$0,3987$	$0,3723$	$0,3680$	$0,3678$	e^{-1}
$p_n(e^{-1})$	$0,6321$	0.4323	$0,3902$	$0,3718$	$0,3680$	$0,3678$	e^{-1}
$p_n(x_n) - p_n(e^{-1})$	$< 0,368$	$< 0,068$	$< 0,009$	$< 10^{-3}$	$< 10^{-5}$	$< 10^{-8}$	

(iii) Falls die Zufallsvariable N nicht unbekannt ist, kann eine Strategie $\rho_{x,r}$ besser sein als die Strategie ρ_{z^*}. Das tritt schon im Fall $N = 3, T = 1, F = \mathrm{id}$ ein: Dann ist

$$\rho_{0,2} = \sigma_2 = \sigma_R,$$

das ist die optimale Strategie nach Bemerkung 2.5 (ii), und sie ist besser als $\rho_{x_3} = \rho_{z^*}$.

Die Übersichtsartikel [Fe89] und [Fr83] geben ein klares Bild der Geschichte und der Varianten des Sekretärinnenproblems und viele Referenzen.

Literatur

[Br84] F.T. Bruss: A unified approach to a class of best choice problems with an unknown number of options. The Annals of Probability **12.3** (1984), 882–889.

[Dy63] E.B. Dynkin: The optimal choice of the stopping moment for a Markov process. Dokl. Akad. Nauk. SSSR **150**, 238–240.

[DJ69] E.B. Dynkin, A.A. Juschkewitsch: Markov Prozesse – Sätze und Aufgaben. Springer, 1969.

[Fe89] T.S. Ferguson: Who solved the secretary problem? Statistical Science **4.3** (1989), 282–289.

[Fr83] P.R. Freeman: The secretary problem and its extensions. Internat. Statist. Rev. **51** (1983), 189–206.

[Li61] D.V. Lindley: Dynamic programming and decision theory. Appl. Statist. **10** (1961), 35–51.

3 Zweiseitige Märkte mit Matching-Mechanismus

Der Nobelpreis in Wirtschaftswissenschaften 2012 wurde an Roth und Shapley für ihre Resultate zu Matching Märkten vergeben. Ein Matching Markt ist ein zweiseitiger Markt, wo es zwei Gruppen von Spielern gibt, so dass die Spieler der beiden Gruppen zusammengebracht werden müssen, bijektiv oder nicht, unter Berücksichtigung von Präferenzen, die die einzelnen Spieler haben.
Beispiele sind Männer und Frauen auf dem/einem Heiratsmarkt, Firmen und Arbeitsuchende auf dem/einem Jobmarkt, Krankenhäuser und Praktikanten, Schulen und Schüler. In allen Fällen sollen die Marktteilnehmer so zusammengebracht werden, dass jeder einen (oder viele) möglichst gute(n) Partner erhält.
Was da eine gute Lösung ist, hängt dabei davon ab, für wen sie gut sein soll. Wenn man davon ausgeht, dass die Präferenzen bekannt sind, ist das Problem, ein Matching zu finden, Teil der kooperativen Spieltheorie. Wenn die Marktteilnehmer andere als die wahren Präferenzen angeben können, hat das Problem Elemente der nichtkooperativen Spieltheorie.

Beispiele 3.1 (i) In New York City müssen jedes Jahr etwa 90000 Schüler auf etwa 500 High Schools mit Hilfe eines Platzvergabesystems verteilt werden. Erst 2004 wurde das Vergabesystem mit spieltheoretischen Erkenntnisse neugefasst. Ein dafür ausgearbeiteter Algorithmus sorgt nun für eine recht gute Verteilung. Schulen und Schüler geben dabei Präferenzen an. Vor 2004 wurden etwa 30000 Schüler auf Schulen verteilt, die nicht ihren Präferenzen entsprachen, seit 2004 sind es nur noch etwa 3000.

(ii) In den USA war und ist es üblich, dass angehende Ärzte nach dem Studium ein *Internship* in einem Krankenhaus ableisten. Die Wahl des Krankenhauses ist dabei für ihre Karriere und ihr Leben wichtig. Für die Krankenhäuser ist es wichtig, genug und möglichst gute angehende Ärzte zu bekommen. Der Wunsch der Krankenhäuser, sich möglichst früh möglichst gute Kandidaten zu sichern, hatte in den 40er Jahren dazu geführt, dass schon bis zu 2 Jahre vor Studienabschluss Übereinkünfte zu Internships zwischen Kandidaten und Krankenhäusern geschlossen wurden. Das hat das Studium gestört, und es war mangels bekannter Abschlussnoten für die Krankenhäuser mit Risiken verbunden.
Anfang der 50 Jahre wurde dann ein Vergabeverfahren eingeführt, bei dem Krankenhäuser und Kandidaten Präferenzlisten an eine zentrale Stelle gegeben haben, die dann die Verteilung vornahm. Obwohl die Teilnahme freiwillig war, war viele Jahre lang die Teilnahmequote auf Studentenseite bei etwa 95 %. Erst in den 70er Jahre sank sie auf 85 %, zu einem guten Teil aufgrund

von Ehepaaren von Medizinstudenten, deren besondere Situationen das Verteilungsverfahren nicht berücksichtigte.
Das Vergabeverfahren ist verwandt zum Gale-Shapley-Algorithmus, den Gale und Shapley 1962 (lange nach den Medizinern) fanden und der unten erklärt wird.

In beiden Beispielen sind die Matchings nicht bijektiv: Schulen nehmen viel mehr als einen Schüler auf, Krankenhäuser sind variabel bei der Anzahl der Internships und sind froh über recht viele.
Aber im folgenden konzentrieren wir uns auf Matching Märkte, wo bijektive Matchings hergestellt werden sollen. Um es anschaulich zu machen, sprechen wir von einem Heiratsmarkt und Männern und Frauen. Weiter wird angenommen, dass die Präferenzordnungen strikt sind, d.h. für eine Person sind alle potentiellen Partner verschieden gut, keine zwei sind gleich gut. Diese Annahme ist nicht so unrealistisch und macht die Theorie um einiges einfacher.
Wir werden uns auch auf Ergebnisse innerhalb der kooperativen Spieltheorie beschränken, genauer: Die wahren Präferenzen der Marktteilnehmer werden als bekannt angenommen, und mit ihnen wird gearbeitet. Am Ende des Kapitels kommen Bemerkungen zu Erweiterungen, insbesondere zu Ergebnissen, die Strategien betreffen, wenn Marktteilnehmer bezüglich ihrer Präferenzen lügen können, um so eventuell ein für sie besseres Matching zu erreichen.
Die Theorie der Matching Märkte begann mit dem Gale-Shapley-Algorithmus 1962 und ist dann in den 70er und 80er Jahren aufgeblüht. Die Praxis der Matching Märkte ist natürlich viel älter, wie das Beispiel 3.1 (ii) oben zeigt. Eine gute Quelle für die Entwicklung bis 1990 ist ein Buch von Roth und Sotomayor von 1990. Alles Material in diesem Kapitel bis auf das letzte Theorem 3.25 zum Blocking Pair Algorithmus findet sich in diesem Buch. Theorem 3.25 ist aus einer Arbeit von Roth und Vande Vate von 1990, die genau wie das Buch und 2 weitere Quellen am Ende des Kapitels zitiert ist.

Definition 3.2 Ein *Matching Markt* ist ein Tupel

$$(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W}).$$

Hier sind M und W endliche nichtleere Mengen, M ist die Menge der Männer, und W ist die Menge der Frauen. $>_m$ für ein $m \in M$ ist eine (vollständige transitive strikte) Ordnung auf der Menge $W \cup \{m\}$, und $>_w$ für ein $w \in W$ ist eine Ordnung auf der Menge $M \cup \{w\}$.
Die Ordnungen $>_m$ und $>_w$ werden gern mit *Präferenzlisten* kodiert: Die Präferenzliste $P(m)$ zu $>_m$ ist ein geordnetes Tupel, in dem jedes Element von $W \cup \{m\}$ genau einmal steht, und zwar von links nach rechts in abnehmender Präferenz für den Mann m. Analog für $>_w$.

Deutung: Je weiter links eine Frau in der Präferenzliste eines Mannes m steht, desto lieber möchte er sie heiraten. Der Mann m hat die Option, Single zu bleiben. Jede der Frauen links von m in der Präferenzliste würde er dieser Option vorziehen. Aber er zieht es vor Single zu bleiben, als eine der Frauen rechts von m in der Präferenzliste zu heiraten. Er selbst und die Frauen w mit $w >_m m$ sind die für ihn *akzeptablen Partner*.
Analog für jede Frau w. Gleichgeschlechtliche Ehen sind im Modell nicht vorgesehen.

Definition 3.3 Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt.
(a) Ein *Matching* μ ist eine Involution

$$\begin{array}{rl} & \mu : M \cup W \to M \cup W \\ \text{mit} & \forall\ m \in M \quad \mu(m) = m \text{ oder } \mu(m) \in W \\ \text{und} & \forall\ w \in W \quad \mu(w) = w \text{ oder } \mu(w) \in M, \\ \text{Involution heißt:} & \mu^2 = \mathrm{id}, \quad \text{jede Involution ist bijektiv.} \end{array}$$

Dann ist $\mu(m)$ der *Partner* von $m \in M$, und $\mu(w)$ ist der *Partner* von $w \in W$.

(b) Ein Matching μ ist *individuell rational* wenn darin jeder Mann und jede Frau einen akzeptablen Partner hat.
Bei einem Matching μ ist eine Person, die keinen akzeptablen Partner hat, eine *blockierende* Person. Also ist ein Matching individuell rational, wenn es darin keine blockierende Person gibt.

(c) Bei einem Matching μ ist ein Paar $(m, w) \in M \times W$ ein *blockierendes Paar*, falls gilt:

$$w >_m \mu(m) \quad \text{ und } m >_w \mu(w),$$

d.h. falls m und w einander ihren jeweiligen Partnern vorziehen.

(d) Ein Matching μ heißt *stabil*, wenn es individuell rational ist und von keinem Paar blockiert wird.

Das Matching $\mu = \mathrm{id}$, wo also jede Person Single bleibt, ist individuell rational. Es gibt auch stabile Matchings, aber das ist nicht trivial. Der Gale-Shapley-Algorithmus, Theorem 3.6, wird zu jedem Matching Markt zwei stabile Matchings konstruieren.

Beispiel 3.4 (Knuth 1976)

$$\begin{array}{rl} M = (m_1, m_2, m_3), & W = (w_1, w_2, w_3), \\ P(m_1) = (w_2, w_1, w_3, m_1), & P(w_1) = (m_1, m_3, m_2, w_1), \\ P(m_2) = (w_1, w_3, w_2, m_2), & P(w_2) = (m_3, m_1, m_2, w_2), \\ P(m_3) = (w_1, w_2, w_3, m_3), & P(w_3) = (m_1, m_3, m_2, w_3). \end{array}$$

Bei allen Teilnehmern hat das Single-Dasein niedrigste Präferenz. Daher ist jedes Matching individuell rational.
Neben dem Matching id, wo alle Teilnehmer Singles sind, gibt es zu jedem Paar (m_i, w_j) genau zwei Matchings, wo nur m_i und w_j Singles sind, und genau ein Matching, wo nur m_i und w_j nicht Singles sind, und es gibt 6 Matchings ohne Singles (man kann sie mit den Permutationen von M in Bijektion bringen). Also gibt es insgesamt $1+(2+1)\cdot 3\cdot 3+6 = 34$ Matchings. Aber bei einem Matching, wo m und w Singles sind, ist (m, w) ein blockierendes Paar, denn sie ziehen es vor, einander zu heiraten, als Singles zu bleiben. Daher werden im folgenden nur die 6 Matchings betrachtet, die keine Singles enthalten:

$$\mu_1 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_2 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_2 & m_1 & m_3 \end{pmatrix}, \quad \mu_3 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_2 & m_3 & m_1 \end{pmatrix},$$

$$\mu_4 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_2 & m_1 \end{pmatrix}, \quad \mu_5 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}, \quad \mu_6 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}.$$

μ_1, μ_2, μ_3 und μ_4 haben je 2 blockierende Paare, μ_5 und μ_6 haben keine blockierenden Paare, also sind genau μ_5 und μ_6 stabile Matchings. Man kann versuchen, ein nicht stabiles Matching zu verbessern, indem man ein blockierendes Paar (m, w) wählt und zum neuen Matching übergeht, wo man das Paar (m, w) und das Paar $(\mu(w), \mu(m))$ verheiratet (und das dritte Paar in Ruhe läßt).
Das folgende Diagramm zeigt alle 6 Matchings und alle blockierenden Paare. Jedes blockierende Paar steht zusammen mit einem Pfeil, dessen Fußpunkt das Matching anzeigt, bei dem das blockierende Paar blockierend ist, und dessen Spitze das Matching anzeigt, das man nach dem Schritt oben erhält. Man sieht, dass man von jedem Matching zu einem stabilen Matching gelangen kann, aber auch, dass es einen Zykel gibt. Knuth (1976) hatte das Beispiel so gewählt, dass es den Zykel gibt.

$$\begin{tikzcd}
\mu_1 \arrow[d, "(m_1,w_2)"] \arrow[dd, bend right, "(m_3,w_2)"'] & & \mu_4 \arrow[ll, "(m_1,w_1)"'] \arrow[dd, bend left, "(m_1,w_2)"] \\
\mu_2 \arrow[rr, "(m_3,w_2)"] \arrow[drr, "(m_3,w_1)"'] & & \mu_3 \arrow[u, "(m_3,w_1)"'] \arrow[dll, "(m_1,w_1)"] \\
\mu_6 & & \mu_5
\end{tikzcd}$$

Bemerkungen 3.5 (i) Fast immer (außer in Theorem 3.20) werden nur individuell rationale Matchings betrachtet. Dann braucht man für jeden Mann $m \in M$ nur die Einschränkung der Ordnung $>_m$ auf die Menge $W(m) := \{w \in W \,|\, w >_m m\}$, oder auf die Menge $W(m) \cup \{m\}$ der akzeptablen Partner, und analog für jede Frau $w \in W$. Für den Mann m sind dann die nicht akzeptablen Frauen, also die, die er weniger als das Single-Dasein mag, egal. Analog für jede Frau $w \in W$.

(ii) Der Gale-Shapley-Algorithmus, Theorem 3.6, wird die Existenz von stabilen Matchings beweisen. Das hängt aber an mehreren Eigenschaften des Matching Marktes: Er ist zweiseitig, alle Präferenzen sind strikt, die Matchings sind Bijektionen.

(iii) Es gibt ein Beispiel von Gale und Shapley, das *Roommate Problem*, eines einseitiges Marktes, wo Paare gebildet werden sollen und Präferenzen vorliegen und es keine stabilen Matchings gibt (Blatt 3, Aufgabe 1).

(iv) Es gibt auch ein Beispiel eines dreiseitigen Marktes (Mann - Frau - Kind), wo Tripel gebildet werden sollen und jede Person Präferenzen unter den Paaren aus Personen der anderen beiden Seiten hat und es keine stabilen Matchings gibt.

(v) Es gibt auch ein Beispiel eines zweiseitigen Marktes mit den Seiten *Firmen* und *Arbeitsuchende*, wo die Matchings nicht bijektiv sind, sondern eine Teilmenge (oder alle) der Arbeiter auf die Firmen aufgeteilt werden sollen und wo es keine stabilen Matchings gibt.

Im Gale-Shapley-Algorithmus heißt ein Antrag *akzeptabel*, falls er einer Frau w von einem für sie akzeptablen Mann m gestellt wird, d.h. falls $m >_w w$ gilt.

Theorem 3.6 *(Gale-Shapley-Algorithmus, 1962)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ *ein Matching Markt. Der folgende Algorithmus führt zu einem stabilen Matching* μ_M*. Wenn man die Rollen von Frauen und Männern vertauscht, führt er zu einem stabilen Matching* μ_W*.*
Algorithmus:

1. *Schritt: (a) Jeder Mann, bei dem auf Platz 1 seiner Präferenzliste eine Frau steht, macht dieser Frau einen Antrag. Falls er selbst auf Platz 1 steht, macht er niemandem einen Antrag, sondern wird Single.*

   (b) Jede Frau wählt unter den akzeptablen Anträgen (falls es solche Anträge gibt) den besten Antrag aus und nimmt ihn vorläufig an. Alle anderen Anträge weist sie ab.

2. *Schritt: (a) Alle abgewiesenen Männer, bei denen auf Platz 2 ihrer Präferenzliste eine Frau steht, machen dieser Frau einen Antrag. Falls*

ein abgewiesener Mann selbst auf Platz 2 steht, macht er keinen Antrag mehr, sondern wird Single.

(b) Jede Frau wählt unter den akzeptablen Anträgen des 2. Schritts, falls es solche gibt, und dem im 1. Schritt vorläufig angenommenen Antrag, falls es so einen gibt, den besten aus und nimmt ihn vorläufig an. Alle anderen Anträge weist sie ab (auch den eventuell im 1. Schritt vorläufig angenommen Antrag, falls im 2. Schritt ein besserer gekommen ist).

Weitere Schritte: (a) Das Verfahren wird solange fortgesetzt, bis jeder Mann entweder einen Antrag gemacht hat, der vorläufig angenommen ist, oder aber jeder akzeptablen Frau auf seiner Liste einen Antrag gemacht hat, der dann abgelehnt worden ist.

(b) Dann werden alle vorläufig angenommen Anträge festgemacht. Die Männer ohne vorläufig angenommene Anträge und die Frauen, die keine akzeptablen Anträge erhalten haben, werden Singles.

Beweis: Da jeder Mann nur akzeptablen Frauen Anträge gemacht hat und jede Frau nur akzeptable Anträge vorläufig angenommen hat, und Männer und Frauen ohne bindenden Antrag Singles werden, erhält man genau ein individuell rationales Matching μ_M.
Es bleibt zu zeigen, dass es stabil ist. Das wird indirekt gezeigt. Sei (m, w) ein blockierendes Paar. Dann gilt $w >_m \mu_M(m)$. Daher hatte der Mann m der Frau w einen Antrag gemacht. Der ist aber offensichtlich abgelehnt worden. Das bedeutet, dass die Frau w jemand besseres gefunden hat. Aber dann kann das Paar (m, w) nicht blockierend sein. Also gibt es kein blockierendes Paar. □

Beispiele 3.7 (i) Der Gale-Shapley-Algorithmus im Beispiel 3.4.
1. Schritt: m_1 macht w_2 einen Antrag, m_2 und m_3 machen w_1 Anträge. w_2 nimmt den Antrag von m_1 vorläufig an, w_1 nimmt den Antrag von m_3 vorläufig an.
2. Schritt: m_2 macht w_3 einen Antrag. w_3 nimmt den Antrag von m_2 vorläufig an.
3. Schritt: Alle Männer haben zur Zeit vorläufig angenommene Anträge. Die Anträge werden bindend gemacht. Man erhält das stabile Matching

$$\mu_M = \mu_5 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}.$$

(ii) Der Gale-Shapley-Algorithmus mit vertauschten Rollen von Männern und Frauen im Beispiel 3.4 führt zum stabilen Matching

$$\mu_W = \mu_6 = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix}.$$

Der Gale-Shapley-Algorithmus liefert nicht nur die Existenz von stabilen Matchings. Die beiden Matchings μ_M und μ_W, die mit ihm konstruiert werden, haben auch besondere Eigenschaften.
Theorem 3.17 wird zeigen, dass μ_M unter allen stabilen Matchings für alle Männer das beste und für alle Frauen das schlechteste ist, und umgekehrt bei μ_W. Zwar konkurrieren die Männer um die Frauen (und umgekehrt), aber wenn die Männer und Frauen realistisch sind und sich an die stabilen Matchings halten, dann ergeben sich implizit Koalitionen, alle Männer gegen alle Frauen, und es gibt das für alle Männer beste und für alle Frauen schlechteste stabile Matching μ_M und das für alle Männer schlechteste und für alle Frauen beste Matching μ_W.
Die folgenden Resultate geben der Menge aller stabilen Matchings Struktur und zeigen die besonderen Rollen von μ_M und μ_W.

Lemma 3.8 *(Zerlegungslemma von Knuth (1976)) Seien μ und ν stabile Matchings in einem Matching Markt $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$. Die Mengen M und W werden in je 3 Teilmengen aufgeteilt.*

$$\begin{aligned} M^+ &:= \{m \in M \,|\, \mu(m) >_m \nu(m)\}, \\ M^0 &:= \{m \in M \,|\, \mu(m) = \nu(m)\}, \\ M^- &:= \{m \in M \,|\, \mu(m) <_m \nu(m)\}, \end{aligned}$$

und analog werden W^+, W^0 und W^- definiert.
Dann gilt: (i) Sowohl unter μ als auch unter ν sind die Männer in M^+ mit den Frauen in W^- gepaart.
(ii) Sowohl unter μ als auch unter ν sind die Männer in M^- mit den Frauen in W^+ gepaart.
(iii) Sowohl unter μ also auch unter ν sind die Personen in $M^0 \cup W^0$ mit den Personen in $M^0 \cup W^0$ gepaart.
In Formeln:

$$\begin{aligned} M^+ &\overset{\mu}{\rightleftarrows} W^-, & M^+ &\overset{\nu}{\rightleftarrows} W^-, \\ M^- &\overset{\mu}{\rightleftarrows} W^+, & M^- &\overset{\nu}{\rightleftarrows} W^+, \\ M^0 \cup W^0 &\overset{\mu}{\rightleftarrows} M^0 \cup W^0, & M^0 \cup W^0 &\overset{\nu}{\rightleftarrows} M^0 \cup W^0. \end{aligned}$$

Beweis: Da $M^0 \cup W^0$ die Menge der Personen ist, auf denen μ und ν übereinstimmen, ist (iii) klar.
Für ein $m \in M^+$ gilt

$$\mu(m) >_m \nu(m) \geq_m m,$$

also ist m in μ nicht Single, also ist $\mu(m) \in W$. Sei $w := \mu(m)(\neq \nu(m))$. Da ν stabil ist, ist (m, w) kein blockierendes Paar in ν. Also ist

$$\nu(w) >_w \mu(w) = m.$$

Daraus folgt $w \in W^-$.
Also ist $\mu(M^+) \subset W^-$. Analog schließt man $\mu(W^+) \subset M^-$. Analog schließt man für ν (mit vertauschten Rollen von M^+ und M^- und von W^+ und W^-) $\nu(M^-) \subset W^+$ und $\nu(W^-) \subset M^+$. Weil μ und ν Bijektionen sind, folgt $|M^+| = |W^-|$ und $|M^-| = |W^+|$. Damit und weil μ und ν Involutionen sind, folgen nun (i) und (ii). $\square$

Das Lemma sagt, dass sowohl unter μ als auch unter ν die Männer, die mit μ (bzw. ν) zufriedener sind, mit den Frauen gepaart sind, die mit ν (bzw. μ) zufriedener sind.
Wenn alle Männer mit μ mindestens so zufrieden sind wie mit ν und mindestens einer mit μ echt zufriedener ist, wird $\mu >_M \nu$ geschrieben. Die Notation $\mu >_W \nu$ wird analog definiert. $>_M$ und $>_W$ definieren partielle (transitive strikte) Ordnungen auf der Menge aller Matchings.

Korollar 3.9 *Seien μ und ν zwei stabile Matchings in einem Matching Markt. Dann gilt*

$$\mu >_M \nu \iff \nu >_W \mu.$$

Beweis: $\mu >_M \nu$ bedeutet gerade $M^- = \emptyset$ und $M^+ \neq \emptyset$, und $\nu >_W \mu$ bedeutet gerade $W^+ = \emptyset$ und $W^- \neq \emptyset$. Nach Lemma 3.8 gilt aber $|M^-| = |W^+|$ und $|M^+| = |W^-|$, daher gilt

$$M^- = \emptyset \iff W^+ = \emptyset, \qquad M^+ \neq \emptyset \iff W^- \neq \emptyset. \qquad \square$$

Korollar 3.10 *Sei $(M, W, (>_m)_{m \in M}, (>_w)_{w \in W})$ ein Matching Markt. Dann haben alle stabilen Matchings die gleichen Singles.*

Beweis: Indirekt. Seien μ und ν zwei stabile Matchings. Sei m ein Mann, der in ν ein Single ist, aber nicht in μ. Dann ist $m \in M^+$. Nach Lemma 3.8 ist $\nu(m) \in W^-$, also ist m doch kein Single in ν, Widerspruch. Der Fall, dass eine Frau in ν ein Single ist, aber nicht in μ, wird genauso zum Widerspruch geführt. $\square$

Definition 3.11 Für zwei stabile Matchings μ und ν in einem Matching Markt werden zwei Abbildungen

$$\mu \vee_M \nu : M \cup W \to M \cup W \quad \text{ und } \mu \wedge_M \nu : M \cup W \to M \cup W$$

folgendermaßen definiert.

$$\begin{aligned}
\mu \vee_M \nu(m) &:= \text{ der für } m \text{ bessere Partner in } \{\mu(m), \nu(m)\}, \\
\mu \vee_M \nu(w) &:= \text{ der für } w \text{ schlechtere Partner in } \{\mu(w), \nu(w)\}, \\
\mu \wedge_M \nu(m) &:= \text{ der für } m \text{ schlechtere Partner in } \{\mu(m), \nu(m)\}, \\
\mu \wedge_M \nu(w) &:= \text{ der für } w \text{ bessere Partner in } \{\mu(w), \nu(w)\}.
\end{aligned}$$

Theorem 3.12 *(Gittertheorem von Conway (laut Knuth 1976)) Seien μ und ν zwei stabile Matchings in einem Matching Markt. Dann sind auch $\mu \vee_M \nu$ und $\mu \wedge_M \nu$ stabile Matchings.*

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\lambda := \mu \vee_M \nu$ ein stabiles Matching ist. Durch Vertauschen der Rollen von Männern und Frauen erhält man dann auch, dass $\mu \wedge_M \nu$ ein stabiles Matching ist. Es wird gezeigt werden:

1. Es ist eine Involution.
2. Es ist ein Matching.
3. Es ist individuell rational.
4. Es ist ein stabiles Matching.

1. Schritt: Sei $m \in M$. Im Fall $\mu(m) = \nu(m) =: p$ ist auch $\lambda(m) = p$, und dann ist $\nu(p) = m = \mu(p) = \lambda(p)$. Also ist λ eingeschränkt auf $\{m, p\}$ eine Involution. Hier wird p geschrieben, um den Fall, dass m ein Single ist, einzuschließen.
Sei nun $\mu(m) \neq \nu(m)$, und sei oBdA $w := \mu(m) >_m \nu(m)$, also $w = \lambda(m)$. Dann ist $m \in M^+$. Nach Lemma 3.8 ist $w = \mu(m) \in W^-$, also $\nu(w) >_w \mu(w) = m$. Daher ist $\lambda(w) = m$, und λ ist eingeschränkt auf $\{m, w\}$ eine Involution.

2. Schritt: λ ist nach dem 1. Schritt eine Involution. Es ist auch klar, dass eine Person in λ Single ist oder mit einer Person des anderen Geschlechts gepaart ist. Daher ist λ ein Matching.

3. Schritt: Für jede Person ist der Partner in λ einer der akzeptablen Partner in μ und ν. Daher ist mit μ und ν auch λ individuell rational.

4. Schritt: Indirekt. Sei (m, w) ein blockierendes Paar für λ. Dann gilt

$$w >_m \lambda(m) \quad \text{und} \quad m >_w \lambda(w),$$

also

$$(w >_m \mu(m) \text{ und } w >_m \nu(m)) \quad \text{und} \quad (m >_w \mu(w) \text{ oder } m >_w \nu(w)).$$

Im Fall $m >_w \mu(w)$ ist (m, w) ein blockierendes Paar für μ, im Fall $m >_w \nu(w)$ ist (m, w) ein blockierendes Paar für ν. Aber μ und ν sind stabil, Widerspruch. □

Definition 3.13 (a) Ein *Gitter* $(L, >)$ ist eine nichtleere Menge L mit einer partiellen (transitiven strikten) Ordnung $>$ mit der Eigenschaft, dass für je zwei Elemente a und $b \neq a$ von L eindeutige Elemente $a \vee b$ und $a \wedge b$ mit folgenden Eigenschaften existieren.

$$\begin{aligned} a \vee b \geq a, &\quad a \vee b \geq b. \\ \forall\, c \in L \text{ mit } c \geq a,\ c \geq b \text{ gilt:} &\quad c \geq a \vee b. \\ a \wedge b \leq a, &\quad a \wedge b \leq b. \\ \forall\, c \in L \text{ mit } c \leq a,\ c \leq b \text{ gilt:} &\quad c \leq a \wedge b. \end{aligned}$$

Deutung: $a \vee b$ ist bezüglich $>$ das Supremum von a und b, und $a \wedge b$ ist bezüglich $>$ das Infimum von a und b.
Bemerkung: Man setzt $a \vee a := a$ und $a \wedge a := a$. Das ist konsistent mit den Eigenschaften oben.

(b Ein Gitter $(L, >)$ heißt *distributiv*, falls alle $a, b, c \in L$ folgendes erfüllen:

$$\begin{aligned} a \wedge (b \vee c) &= (a \wedge b) \vee (a \wedge c), \\ a \vee (b \wedge c) &= (a \vee b) \wedge (a \vee c). \end{aligned}$$

Korollar 3.14 *Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt, und sei L die Menge der stabilen Matchings. Dann sind die Paare $(L, >_M)$ und $(L, >_W)$ distributive Gitter.*

Beweis: Nach Theorem 3.8 ist L nichtleer. Theorem 3.12 zeigt, dass $(L, >_M)$ und $(L, >_W)$ Gitter sind. Dass sie distributiv sind, ist eine leichte Übung. □

Bemerkungen 3.15 (i) Ein orientierter Graph ist ein Tupel (E, P) mit der endlichen Eckenmenge E und der Teilmenge P von $E \times E$. Die Elemente von P sind gerichtete Kanten, also Pfeile, zwischen zwei Ecken.

(ii) Einem endlichen Gitter $(L, >)$ kann man in folgender Weise einen orientierten Graphen zuordnen. Man setzt $E := L$, und ein Paar $(a, b) \in L \times L$ ist genau dann in P, wenn $a < b$ gilt und es kein Element c mit $a < c < b$ gibt.

(iii) Der Graph zu einem endlichen Gitter $(L, >)$ hat spezielle Eigenschaften.

(α) Es gibt keine Zykel, denn sonst würde wegen der Transitivität von $>$ jedes Element a eines Zykel $a > a$ erfüllen (insbesondere gibt es keinen Pfeil von einem Element auf sich selbst).

(β) Im Fall $a < b$ gibt es vielleicht keinen Pfeil von a nach b, aber sicher eine Kette von Pfeilen, die von a über andere Elemente zu b führt.

(γ) Der Graph ist zusammenhängend. Denn zu beliebigen Elementen a und b gibt es eine Kette von Pfeilen von a zu $a \vee b$ und eine Kette von Pfeilen von b zu $a \vee b$. (Man könnte auch $a \wedge b$ benutzen.)

(δ) Es gibt genau ein Element a_{max}, von dem kein Pfeil ausgeht. Das ist das eindeutige maximale Element, d.h. es erfüllt $a_{max} > b$ für jedes $b \in L - \{a_{max}\}$. Jede maximale Kette von Pfeilen endet in a_{max}.

Analog gibt es genau ein Element a_{min}, zu dem kein Pfeil führt. Das ist das eindeutige minimale Element, d.h. es erfüllt $a_{min} < b$ für jedes $b \in L - \{a_{min}\}$. Jede maximale Kette von Pfeilen beginnt in a_{min}.

(ε) Treffen sich 2 Ketten von Pfeilen, die in a bzw b starten, in einer Ecke c, so gibt es eine Kette von Pfeilen von $a \vee b$ nach c. Eine analoge Eigenschaft erfüllt $a \wedge b$.

(iv) Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt, und sei L die Menge der stabilen Matchings. Wegen Korollar 3.9 erhält man den Graphen des Gitters $(L, >_W)$ aus dem Graphen des Gitters $(L, >_M)$ durch Umdrehen aller Pfeile.

Definition 3.16 Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt. Für jede Person p ist $E(p) \subset M \cup W$ die Menge der Personen, die in mindestens einem stabilen Matching Partner von p sind. Sie sind die *erreichbaren* Partner der Person p.
Ein Paar (m, w) oder (m, m) oder (w, w) ist *erreichbar*, falls es in mindestens einem stabilen Matching auftritt.

Theorem 3.17 *Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt.*
(a) Dann ist μ_M das maximale Element im Gitter $(L, >_M)$, und μ_W ist das minimale Element im Gitter $(L, >_M)$.
(b) Weiter ist

$$\begin{aligned} \mu_M(m) &= \text{der beste erreichbare Partner von } m, \\ \mu_M(w) &= \text{der schlechteste erreichbare Partner von } w, \\ \mu_W(m) &= \text{der schlechteste erreichbare Partner von } m, \\ \mu_W(w) &= \text{der beste erreichbare Partner von } w. \end{aligned}$$

Beweis: Es reicht zu zeigen, dass $\mu_M(m)$ für jeden Mann m der beste erreichbare Partner von m ist. Daraus folgt sofort, dass μ_M das maximale Element im Gitter $(L, >_M)$ ist. Wegen Bemerkung 3.15 (iv) ist es dann auch das minimale Element im Gitter $(L, >_W)$. Durch Vertauschen der Rollen von Männern und Frauen folgt, dass μ_W das maximale Element im Gitter (L, μ_W) und das minimale Element im Gitter (L, μ_M) ist.
Schließlich erhält man mit dem Gittertheorem 3.12 nun leicht die restlichen 3 Aussagen von Teil (b): Wenn zum Beispiel für eine Frau $\mu_M(w)$ nicht der schlechteste erreichbare Partner von w wäre, gäbe es ein anderes stabiles Matching ν mit $\nu(w) <_W \mu_M(w)$, aber dann wäre für diese Frau das Matching

$\mu_M \vee \nu$ schlechter als das Matching μ_M, also wäre μ_M nicht das minimale Element im Gitter $(L, >_W)$.
Um zu beweisen, dass für jeden Mann m der Partner $\mu_M(m)$ der beste erreichbare Partner ist, reicht es zu zeigen, dass im Gale-Shapley-Algorithmus jeder Mann, der Frauen als erreichbare Partner hat (der also in den stabilen Matchings nicht Single bleibt, vgl. Korollar 3.10) mit dem Antrag an die beste erreichbare Frau Erfolg hat. Das wird indirekt gezeigt.
Sei also der k-te Schritt im Gale-Shapley-Algorithmus der erste Schritt, in dem ein Mann m von der für ihn besten erreichbaren Frau w abgelehnt wird. Da w für m erreichbar ist, ist er für sie akzeptabel. Daher war der Grund ihrer Ablehnung, dass ihr im k-ten Schritt oder schon vorher ein Antrag eines für sie besseren Mannes $\widetilde{m}$ vorliegt.
Dann sind für $\widetilde{m}$ alle Frauen, denen er vor w einen Antrag gemacht hatte, die also besser für ihn wären, unerreichbar. Denn sonst wäre der k-te Schritt nicht der erste Schritt, in dem ein Mann von der besten für ihn erreichbaren Frau abgelehnt wird.
Da w für m erreichbar ist, gibt es ein stabiles Matching ν mit $\nu(m) = w$. In diesem Matching ν ist der Partner $\nu(\widetilde{m})(\neq w)$ für $\widetilde{m}$ natürlich erreichbar, also hat er ihr (falls $\nu(\widetilde{m})$ eine Frau ist) im Gale-Shapley-Algorithmus nicht vor w einen Antrag gemacht, also ist $\nu(\widetilde{m}) <_{\widetilde{m}} w$. Daher ist das Paar $(\widetilde{m}, w)$ ein blockierendes Paar im stabilen Matching ν, ein Widerspruch. □

Beispiel 3.18 (Knuth)

$$\begin{aligned}
M &= (m_1, m_2, m_3, m_4), & W &= (w_1, w_2, w_3, w_4),\\
P(m_1) &= (w_1, w_2, w_3, w_4, m_1), & P(w_1) &= (m_4, m_3, m_2, m_1, w_1),\\
P(m_2) &= (w_2, w_1, w_4, w_3, m_2), & P(w_2) &= (m_3, m_4, m_1, m_2, w_2),\\
P(m_3) &= (w_3, w_4, w_1, w_2, m_3), & P(w_3) &= (m_2, m_1, m_4, m_3, w_3),\\
P(m_4) &= (w_4, w_3, w_2, w_1, m_4), & P(w_4) &= (m_1, m_2, m_3, m_4, w_4).
\end{aligned}$$

Bei allen Teilnehmern hat das Single-Dasein niedrigste Präferenz. Daher ist jedes Matching individuell rational. Bei einem Matching, wo m und w Singles sind, ist (m, w) ein blockierendes Paar, denn sie ziehen es vor, einander zu heiraten, als Singles zu bleiben. Es gibt $4! = 24$ Matchings ohne Singles. 10 von ihnen sind stabil. Das Bild unten zeigt diese 10 Matchings und die Pfeile des Graphen zu $(L, >_M)$. Jedes 4-Tupel $(a_1a_2a_3a_4)$ kodiert das Matching μ mit $\mu(w_i) = m_{a_i}$. Dass genau diese 10 Matchings stabil sind, folgt aus weiteren interessanten und ungewöhnlich regulären Eigenschaften dieses Matching Marktes.
Bei einem Paar (m, w) sei $a(m, w)$ der Rang des Mannes m in der Präferenzliste der Frau w, und $b(m, w)$ sei der Rang der Frau w in der Präferenzliste des Mannes m. Dann ist stets $a(m, w) + b(m, w) = 5$. Es ist ein ziemlich unglücklicher Heiratsmarkt.

Die Matchings $\mu_1, \mu_4, \mu_7, \mu_{10}$ sind genau die Matchings, wo jeder Mann die Frau auf Rang $1, 2, 3$ bzw. 4 seiner Präferenzliste bekommt und jede Frau den Mann auf Rang $4, 3, 2$ bzw. 1 ihrer Präferenzliste. Die anderen 6 Matchings $\mu_2, \mu_3, \mu_5, \mu_6, \mu_8, \mu_9$ sind die, wo die Frauen von je 2 Männern für diese gleichen Rang haben und die Differenz dieser beiden Ränge 1 ist. Kein Paar (m, w) kann ein blockierendes Paar sein. Denn die Summe der Ränge der gegenwärtigen Partner ist genau 5 bei den ersten 4 Matchings und 4 oder 5 oder 6 bei den zweiten 6 Matchings. Wäre ein Paar (m, w) blockierend, so müsste w für m einen höheren Rang haben und m für w einen höheren Rang haben als der jeweilige Partner. Aber dann wäre $a(m, w) + b(m, w) \leq 6 - 2 = 4 \neq 5$, ein Widerspruch. Also sind $\mu_1, ..., \mu_{10}$ stabil. Dass die anderen Matchings ohne Singles nicht stabil sind, ist eine Übung.

$$\begin{tikzcd}
 & \mu_M = \mu_1 = (1234) & \\
\mu_2 = (2134) \arrow[ur] & & \mu_3 = (1243) \arrow[ul] \\
 & \mu_4 = (2143) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\mu_5 = (3142) \arrow[ur] & & \mu_6 = (2413) \arrow[ul] \\
 & \mu_7 = (3412) \arrow[ul] \arrow[ur] & \\
\mu_8 = (4312) \arrow[ur] & & \mu_9 = (3421) \arrow[ul] \\
 & \mu_W = \mu_{10} = (4321) \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

Hier sind jeweils alle Personen des anderen Geschlechts erreichbar, $E(m_i) = W$ und $E(w_i) = M$ für alle $i = 1, 2, 3, 4$. Daher sind auch alle Paare (m, w) erreichbar. Paare (m, m) und (w, w) sind nicht erreichbar, bei den stabilen Matchings gibt es keine Singles. Das Beispiel illustriert auch schön den folgenden Satz. Im Beispiel trifft man allein schon bei μ_1, μ_4, μ_7 und μ_{10} zusammen alle erreichbaren Partner und alle erreichbaren Paare.

Theorem 3.19 *(Gusfield, (hier ohne Beweis)) Auf jeder Kette von Pfeilen von μ_W nach μ_M im Graphen zum Gitter $(L, >_M)$ eines Matching Marktes trifft man alle erreichbaren Paare.*

Der folgende Satz zeigt, dass μ_M für die Männer auch nicht verbesserbar ist, wenn man die stabilen Matchings verläßt, aber starke Forderungen an das *besser* stellt. Das Beispiel danach zeigt, dass μ_M für die Männer bei schwächeren Forderungen verbesserbar ist.

Theorem 3.20 *(Schwache Pareto-Optimalität)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt. Es gibt kein individuell rationales Matching μ, so dass es für jeden Mann besser als μ_M ist, d.h. so dass $\mu(m) >_m \mu_M(m)$ für alle Männer gilt. (Eine analoge Aussage gilt für die Frauen.)

Beweis: Indirekt. Sei μ ein solches Matching. Dann wäre unter μ jeder Mann m mit einer Frau $w = \mu(m) \in \mu(M)$ liiert, die ihn beim Gale-Shapley-Algorithmus abgewiesen hat. Da μ individuell rational ist, ist m für w akzeptabel. Daher hat sie ihn im Gale-Shapley Algorithmus zugunsten eines besseren Mannes abgewiesen. Also ist sie auch unter μ_M mit einem Mann liiert und nicht Single.
Weil die Frauen in $\mu(M)$ unter μ alle Männer als Partner aufgebraucht haben, und weil sie auch unter μ_M Männer als Partner haben, brauchen sie auch unter μ_M alle Männer als Partner auf. Daraus folgt erstens $\mu_M(M) = \mu(M)$, und zweitens, dass alle Männer unter μ_M mit Frauen liiert sind (und keiner von ihnen Single ist).
Im vorletzten Schritt des Gale-Shapley Algorithmus wurden die letzten Anträge gemacht und vorläufig angenommen. Sei nun w eine Frau, die da einen Antrag bekommen und vorläufig und dann auch bindend angenommen hat. Sie kann vorher keinen akzeptablen Antrag bekommen haben, denn sonst hätte sie direkt vor dem vorletzten Schritt einen vorläufig angenommenen Antrag und hätte den dann im vorletzten Schritt zugunsten des neuen Antrags abgelehnt. Aber dann würde der dabei abgelehnte Mann nicht mehr zu einem weiteren Antrag kommen und würde Single werden, ein Widerspruch. Also hat w vorher keinen akzeptablen Antrag bekommen.
Daher sind alle Männer außer $\mu_M(w)$ mit ihren Partnern unter μ_M und erst recht mit ihren Partnern unter μ glücklicher als mit w. Und auch $\mu_M(w)$ ist mit seinem Partner unter μ glücklicher als mit w. Daher ist w unter μ ein Single. Dieser Widerspruch beweist den Satz. □

Beispiel 3.21 (Roth, starke Pareto-Optimalität gilt nicht immer)

$$
\begin{aligned}
M &= \{m_1, m_2, m_3\}, & W &= \{w_1, w_2, w_3\} \\
P(m_1) &= (w_2, w_1, w_3, m_1), & P(w_1) &= (m_1, m_2, m_3, w_1), \\
P(m_2) &= (w_1, w_2, w_3, m_2), & P(w_2) &= (m_3, m_1, m_2, w_2), \\
P(m_3) &= (w_1, w_2, w_3, m_3), & P(w_3) &= (m_1, m_2, m_3, w_3).
\end{aligned}
$$

Dann ist

$$\mu_M = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_1 & m_3 & m_2 \end{pmatrix} \quad (= \mu_W).$$

Aber

$$\mu = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ m_3 & m_1 & m_2 \end{pmatrix}$$

ist individuell rational und stellt m_2 gleich gut und m_1 und m_3 besser. μ ist nicht stabil wegen des blockierenden Paars (m_2, w_1).

Bemerkung 3.22 Es gibt Algorithmen zu Berechnung aller stabilen Matchings in einem Matching Markt, und auch Abschätzungen zur Anzahl aller stabilen Matchings, siehe [RS90, 3.2]. Hier beschränken wir uns auf die folgenden beiden Sätze.

Lemma 3.23 *(Vande Vate) Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt mit $|M| = |W|$, und wo das Single-Dasein für jede Person die niedrigste Priorität hat. Dann sind natürlich alle Matchings individuell rational. Ein Matching μ ohne Singles wird nun durch eine Matrix $B(\mu) = (b_{mw})_{m\in M, w\in W}$ kodiert, die*

$$b_{mw} = \begin{cases} 0 & \text{falls } w \neq \mu(m), \\ 1 & \text{falls } w = \mu(m), \end{cases}$$

erfüllt.
Dann ist eine ganzzahlige Matrix (c_{mw}) genau dann die Matrix $B(\mu)$ für ein stabiles Matching μ, wenn sie die folgenden 4 Bedingungen erfüllt.

$$c_{mw} \geq 0 \qquad \forall\ m \in M, w \in W, \tag{3.1}$$
$$\sum_w c_{mw} = 1 \qquad \forall\ m \in M, \tag{3.2}$$
$$\sum_m c_{mw} = 1 \qquad \forall\ w \in W, \tag{3.3}$$
$$\sum_{w >_{\widetilde{m}} \widetilde{w}} c_{\widetilde{m}w} + \sum_{m >_{\widetilde{w}} \widetilde{m}} c_{m\widetilde{w}} + c_{\widetilde{m}\widetilde{w}} \geq 1 \qquad \forall\ \widetilde{m} \in M, \widetilde{w} \in W. \tag{3.4}$$

Beweis: Dieser Beweis ist einfach, der des nächsten Satzes nicht. Die ersten drei Bedingungen sagen, dass für jeden Mann einer der Einträge c_{mw} gleich 1 ist und alle anderen gleich 0 sind, und dass für jede Frau w einer der Einträge c_{mw} gleich 1 ist und alle anderen gleich 0 sind. Daher gibt die Matrix (c_{mw}) ein Matching ohne Singles.
Die vierte Bedingung sagt gerade, dass $(\widetilde{m}, \widetilde{w})$ kein blockierendes Paar ist. □

Theorem 3.24 *(Vande Vate, hier ohne Beweis) Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Lemma 3.23 sei C das konvexe Polyeder im $\mathbb{R}^{|M|\times|M|}$, das* *durch die 4 Bedingungen im Lemma 3.23 definiert ist. Dann sind die Punkte in C mit ganzzahligen Koordinaten (also die, die stabile Matchings kodieren) genau die Ecken von C.*

Ursprünglich wollte ich beim nächsten Satz auch den Beweis präsentieren. Er ist mäßig schwer und hübsch. Aber nach dem vielen schon präsentierten Material scheint er mir nun nicht so wichtig. Allerdings wird dadurch die folgende Bemerkung nicht durchsichtig: Der Beweis des Satzes enthält einen Algorithmus, der im Spezialfall, wo im Start-Matching alle Personen Singles sind und eine gewisse Ausgangsmenge die Menge aller Frauen ist, genau auf den Gale-Shapley Algorithmus hinausläuft.

Theorem 3.25 *(Roth und Vande Vate, 1990, hier ohne Beweis)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt und μ_1 irgendein nicht stabiles Matching. Dann gibt es eine Folge $(\mu_2, ..., \mu_k)$ (für ein $k \in \mathbb{N}$) von Matchings, so dass μ_k stabil ist und μ_i aus μ_{i-1} entsteht, indem man ein blockierendes Paar in μ_{i-1} auswählt und miteinander verheiratet und ihre alten Partner zu Singles macht.

Beispiel 3.4 gibt ein Beispiel, wo man bei unglücklicher Wahl von blockierenden Paaren in einem Zykel von nicht stabilen Matchings bleibt. Aber natürlich gibt es auch zu jedem Matching eine Folge von Matchings wie im Theorem, die bei einem stabilen Matching endet. Im Beispiel kann man sogar immer $k = 2$ erreichen.
Theorem 3.25 gibt nach dem Algorithmus von Gale und Shapley einen zweiten Beweis für die Existenz von stabilen Matchings.
Aus dem Theorem 3.25 folgt ziemlich unmittelbar Korollar 3.26. Der da beschriebene *Blocking Pair Algorithmus* ist wegen des stochastischen Prozesses nicht wirklich ein Algorithmus.

Korollar 3.26 *(Blocking Pair Algorithmus)*
Sei $(M, W, (>_m)_{m\in M}, (>_w)_{w\in W})$ ein Matching Markt. Man wähle bei jedem nicht stabilen Matching eine Wahrscheinlichkeitsverteilung mit lauter positiven Wahrscheinlichkeiten auf der Menge seiner blockierenden Paare.
Dann starte man bei einem beliebigen nicht stabilen Matching und durchlaufe in einem stochastischen Prozeß mit den Schritten im Theorem 3.25 einen Pfad von Matchings, wo in jedem Schritt ein blockierendes Paar gemäß der Wahrscheinlichkeitsverteilung gewählt wird.
Dieser Pfad endet mit Wahrscheinlichkeit 1 bei einem stabilen Matching.

Bemerkungen 3.27 (i) Schließlich sollen noch einige Bemerkungen zu nicht-kooperativen Aspekten bei Matching Märkten gemacht werden. Die treten auf, wenn die Präferenzlisten nicht bekannt sind und die Personen falsche Präferenzlisten angeben können, mit denen dann ein Algorithmus durchgeführt wird. Die Personen im Matching-Markt werden dann Spieler.

Die Angabe einer Präferenzliste stellt dann eine Strategie dar. Das Resultat des Algorithmus ist ein Matching, und der Rang des Partners bei diesem Matching ist die Auszahlung für einen Spieler. Man erhält ein Spiel in Normalform. Es folgen nun einige Aussagen ohne Beweise.

(ii) Es gibt keinen Algorithmus, der zu einem stabilen Matching führt und bei dem für alle Spieler die Angabe der wahren Präferenzliste eine dominante Strategie ist.

(iii) Wenn es mehrere stabile Matchings gibt und ein Algorithmus bei Angabe der wahren Präferenzlisten zu einem stabilen Matching führt, gibt es mindestens einen Spieler, für den es sich lohnt, eine falsche Präferenzliste anzugeben, falls alle anderen die wahren Präferenzlisten angeben.

(iv) Diesen negativen Aussagen steht die folgende positive Aussage gegenüber. Sei $K \subset M \cup W$ mit $K \neq \emptyset$ und $(M \cup W) - K \neq \emptyset$ eine Koalition von Spielern, die falsche Präferenzlisten angeben, während alle Spieler in $(M \cup W) - K$ die wahren Präferenzlisten angeben. Sei μ ein bezüglich der angegebenen Präferenzlisten stabiles Matching. Dann gibt es ein stabiles Matching ν zu den (für *alle* Spieler) wahren Präferenzlisten, das für mindestens einen Spieler aus K mindestens so gut wie μ ist.

(v) Beim Gale-Shapley Algorithmus ist für jeden Mann eine dominante Strategie, seine wahre Präferenzliste anzugeben.

(vi) Wenn es mehrere stabile Matchings gibt, dann lohnt es sich beim Gale-Shapley Algorithmus für mindestens eine Frau, eine falsche Präferenzliste anzugeben.

(vii) Konkret können die Frauen zusammen folgendes erreichen, wenn $\mu \neq \mu_M$ ein weiteres stabiles Matching ist. Wenn jede Frau w als Präferenzliste $(\mu(w), w)$ angibt (also $\mu(w)$ oder gar keiner) und alle Männer die wahren Präferenzlisten angeben, führt der Gale-Shapley Algorithmus zum Matching μ.

(viii) Immerhin können sich die Frauen im Gale-Shapley Algorithmus durch Angabe falscher Präferenzlisten nicht beliebig verbessern: Geben die Männer die wahren Präferenzlisten an und die Frau beliebige, aber so, dass die resultierende Strategienkombination ein Nash-Gleichgewicht ist, dann ist das mit dem Gale-Shapley Algorithmus erhaltene Matching stabil. Insbesondere bekommen die Frauen so nur erreichbare Partner.

Literatur

[GS62] D. Gale, L.S. Shapley: College admissions and the stability of marriage. The American Mathematical Monthly **69.1** (1962), 9–15.

[Kn76] D.E. Knuth: Mariages stables et leurs relations avec d'autres problemes combinatoires: Introduction a l'analyse mathematique des algorithmes. Les Presses de l'Université de Montreal, Montreal, 1976.

[RS90] A.E. Roth, M.A.O. Sotomayor: Two-sided matching: a study in game-theoretic modeling and analysis. Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[RV90] A.E. Roth, J.H. Vande Vate: Random paths to stability in two-sided matching. Econometrica **58.6** (1990), 1475–1480.

4 Auktionen

Auktionen gibt es seit der Antike. Herodot berichtet über Auktionen in Babylon 500 Jahre vor Christus. Eine lange Tradition hat die Versteigerung von Kunstgegenständen und Antiquitäten und Nachlässen. Heutzutage wird alles mögliche versteigert, Briefmarken, Lebensmittel, Blumen, Häuser, Staatsanleihen, Land, Nutzungsrechte für Holz, Nutzungsrechte für Ölfelder, ganze Unternehmen, Spektra für den Mobilfunk. Im Internet kann jedermann etwas zum Verkauf per Versteigerung anbieten, es gibt eBay und viele andere Plattformen dafür.

Warum sind Auktionen so universell und beliebt und erfolgreich? Wo sind Auktionen besonders sinnvoll? Was sind von der Warte der Bieter aus gute Strategien? Was sind von der Warte der Verkäufer aus gute Auktionsformen? Wie sehr unterscheiden sich verschiedene Auktionsformen?

Auktionstheorie ist a priori ein Teil der nicht-kooperativen Spieltheorie und kann im Rahmen von extensiven Spielen mit unvollständiger Information und Bayesschen Nash-Gleichgewichten behandelt werden. Es wird in vielen Lehrbüchern der Spieltheorie behandelt, aber in vielen auch nicht. Inzwischen gibt es Bücher speziell zur Auktionstheorie, unten sind die Bücher [Kr02], [Kl04] und [Mi04] zitiert.

Dieses Kapitel soll einen ersten Eindruck der Auktionstheorie geben. Es folgt weitgehend den ersten beiden (von 11+6) Kapiteln im Buch [Kr02] von Vijay Krishna. Das Einkommensäquivalenztheorem (Revenue Equivalence Theorem) aus Kapitel 3 in [Kr02] wird auch noch behandelt. Der informelle Stil in Kapitel 1 in [Kr02] wird hier in 4.1 bis 4.5 beibehalten, ab Kapitel 2 wird es formaler, das ist hier ab 4.6.

Es gibt eine große Bandbreite von Auktionsformen. Klassisch sind die folgenden vier Auktionsformen.

Definition 4.1 Bei allen vier Auktionsformen möchte ein Verkäufer ein unteilbares Gut verkaufen. Es gibt eine endliche Menge von Bietern. Für jeden von ihnen hat das Gut einen gewissen Wert. Der Wert, den ein Bieter dem Gut beimißt, ist a priori nur ihm bekannt.

(a) Bei der *offenen aufsteigenden* oder *englischen Auktion* kommen Verkäufer und alle Bieter zusammen. Der Verkäufer nennt einen niedrigen Preis, und alle Bieter, die zu dem Preis kaufen würden, melden sich. Schrittweise erhöht der Verkäufer den Preis, bis nur noch ein Bieter übrig ist. Der bekommt das Gut zu dem Preis, wo der letzte andere Bieter ausgestiegen ist.

(b) Auch bei der *offenen absteigenden* oder *holländischen Auktion* kommen Verkäufer und alle Bieter zusammen. Der Verkäufer nennt einen hohen Preis, der für alle Bieter zu hoch sein sollte. Schrittweise erniedrigt der Verkäufer den Preis, bis der erste Bieter bereit ist, zu kaufen. Der bekommt das Gut dann zu diesem Preis.

(c) Die *Erstpreisauktion* findet per Post statt. Jeder Bieter sendet in einem Brief ein Angebot an den Verkäufer. Der Bieter mit dem höchsten Angebot bekommt das Gut zum Preis seines Angebots.

(d) Auch die *Zweitpreisauktion* findet per Post statt. Jeder Bieter sendet in einem Brief ein Angebot an den Verkäufer. Der Bieter mit dem höchsten Angebot bekommt das Gut zum Preis des zweithöchsten Angebots.

Bemerkungen 4.2 (Bewertungen) Auktionen gibt es genau deshalb, weil der Verkäufer unsicher über die Bewertung des Gutes durch die Bieter ist. Wenn er diese kennen würde, könnte er dem Bieter, der das Gut am höchsten bewertet, ein Angebot knapp unter dessen Bewertung machen und das Gut so effizient verkaufen.
Die Bewertungen können verschiedenen Charakter haben. Wenn jemand genau weiß, was das Gut für ihn wert ist und wenn für ihn egal ist, wie andere es bewerten, dann spricht man vom *privaten Wert* (*private value*). Das ist zum Beispiel erfüllt, wenn er das Gut benutzen möchte und aus diesem Nutzen den Wert ableitet. In diesem Kapitel 4 wird nur der Fall von *privaten Werten* behandelt werden.
Wenn es aber zum Beispiel ein Kunstgegenstand ist, den er weiterverkaufen möchte, ist für ihn die Bewertung durch die anderen wichtig. Sie beeinflußt, wenn er sie denn kennenlernt, seine eigene Bewertung. Auch wenn andere Bieter Informationen über das Gut haben, die er nicht hat und auf die er über ihre Bewertungen schließen kann, sind ihre Bewertungen für ihn relevant. In solchen Fällen spricht man von *abhängigen Werten* (*interdependent values*).
Ein Spezialfall von *abhängigen Werten* ist der Fall, wenn der wahre Wert für alle gleich ist, aber allen nicht genau bekannt ist. Dann spricht man vom *gemeinsamen Wert* (*common value*). Das ist zum Beispiel bei einem Stück Land erfüllt, unter dem man Öl vermutet. Erst nach Besitz des Landes wird die Größe des Ölvorkommens per Probebohrung festgestellt.

Lemma 4.3 *(Unpräzise Version)*
(a) Die holländische absteigende Auktion und die Erstpreisauktion sind strategisch äquivalent.
(b) Die englische aufsteigende Auktion und die Zweitpreisauktion sind in einem schwächeren Sinn äquivalent, falls der Fall von privaten Werten *vorliegt.*

Diskussion zum Lemma (statt eines Beweises): (a) *Strategische Äquivalenz* war in der Vorlesung *Game theory* im HWS 2012 für Spiele in Normalform definiert worden. Spielermengen und Strategienmengen sind per Bijektionen verknüpft, und die Nutzenfunktionen unterscheiden sich dann nur durch einen positiven Faktor und Addition von Skalaren.

Die Auktionen hier sind nicht als Spiele in Normalform gegeben. Daher kann hier auch die strategische Äquivalenz nicht präzise formuliert und bewiesen werden. Es wird heuristisch argumentiert.
Bei der holländischen absteigenden Auktion gibt es erst zum Ende der Auktion Informationen über andere Angebote, nämlich über das höchste Angebot. Weil dann die Auktion auch schon zuende ist, ist diese Information wertlos. Daher ist es hier egal, ob man im Fall von *privaten* oder *abhängigen Werten* ist.
Auch bei der Erstpreisauktion erhalten die Bieter vor Ende der Auktion keine Informationen über die Bewertungen der anderen Spieler. Auch hier ist es egal, ob man im Fall von *privaten* oder *abhängigen Werten* ist.
Die Situation ist bei beiden Auktionen die gleiche. Man muss aufgrund derselben Annahmen/Kenntnisse über den wahren Wert des Gutes und die Bewertungen der anderen Bieter zu einem Angebot kommen. Das Angebot ist die Strategie. Die Strategien und die Nutzenfunktionen sind bei beiden Auktionen die gleichen, denn beidemal bekommt der Bieter mit dem höchsten Angebot das Gut und muß einen Preis in Höhe des Angebots zahlen.
(Unten im Theorem 4.9 wird unter Zusatzannahmen behandelt, wie das optimale Angebot bei der Erstpreisauktion aussieht.)

(b) Bei der englischen aufsteigenden Auktion sehen die Bieter im Lauf der Auktion, bis wohin andere Bieter mitbieten. Daraus können sie eventuell Rückschlüsse auf deren Bewertungen ziehen. Aber im Fall von *privaten Werten* sind die Bewertungen der anderen Spieler egal für einen Bieter. Dann wird die eigene Bewertung nicht durch den Verlauf der Auktion beeinflußt. Und dann ist die optimale Strategie leicht angebbar: Sie besteht darin, genau bis zur eigenen Bewertung mitzubieten.
Unten im Theorem 4.7 wird gezeigt werden, dass auch bei der Zweitpreisauktion die optimale Strategie darin besteht, als Angebot genau die eigene Bewertung anzugeben (bei der Erstpreisauktion ist das anders und komplizierter). Bei der Zweitpreisauktion erfahren die Bieter nichts über die Bewertungen und Angebote der anderen Bieter, bevor die Auktion zuende ist. Daher ist es hier egal, ob man im Fall von *privaten* oder *abhängigen Werten* ist.
Aber bei der englischen Auktion ist es nicht egal. Die optimalen Strategien bei englischer Auktion und Zweitpreisauktion sind nur gleich (und bestehen dann in Angebot = eigene Bewertung), falls man im Fall von *privaten Werten* ist. □

Bemerkungen 4.4 (Ertrag und Effizienz) Die Auktionstheorie vergleicht und bewertet verschiedene Auktionsformen. Da gibt es vor allem zwei Kriterien. Der Verkäufer wird sich oft an dem *Ertrag* orientieren, den er bei einer Auktionsform erwarten kann. Aber es kann für ihn auch wichtig sein, ob das Gut bei dem Bieter landet, der ihm den höchsten Wert beimißt oder der es

am besten nutzt. Das kann zum Beispiel relevant sein, wenn der Verkäufer der Staat ist und bei der Vergabe von Lizenzen neben dem Ertrag im Auge haben muß, wie voraussichtlich mit den Lizenzen umgegangen wird. Dieses Kriterium wird *Effizienz* genannt.
Vertreter des freien Marktes könnten argumentieren, dass der Markt selber für die Effizienz sorgt. Wenn das Gut bei einem Bieter landet, wo die Effizienz niedrig ist, wird der es wohl weiterverkaufen. Aber die Erfahrung zeigt offenbar, dass der Markt sehr selten für Effizienz sorgt. Transaktionskosten und unvollständige Informationen behindern die Erfüllung von Effizienz bei Weiterverkäufen. Es ist am besten, wenn der Staat/der Verkäufer durch sorgfältige Wahl der Auktionsform selbst für größtmögliche Effizienz sorgt.
Natürlich gibt es auch weitere Kriterien für die Qualität von Auktionsformen, zum Beispiel die Einfachheit und Verständlichkeit der Regeln oder die Verhinderung von geheimen Absprachen zwischen Bietern.

Bemerkungen 4.5 (Auktionen sind universell und anonym)
Die vier Auktionsformen in Definition 4.1 sind speziell. Viele Mischungen und Variationen und andere Formen sind denkbar. Ein gemeinsamer Aspekt aller Auktionsformen ist, dass über die Angebote der Bieter Informationen über die Bewertungen der Bieter eingehen und dass der Verlauf der Auktion vollständig durch diese Informationen bestimmt ist. Was verkauft wird, ist egal. Mit jeder Auktionsform kann jedes Gut verkauft werden. Auktionen sind *universell*.
Auch Eigenschaften der Bieter sind egal, außer ihren Angeboten. Die Auktionen sind *anonym*. Herkunft, Geschlecht, Ansehen und sonstige Eigenschaften der Bieter sind irrelevant.

Ab hier wird über Kapitel 2 in [Kr02] berichtet. Das ist weniger informell als Kapitel 1 in [Kr02]. Im folgenden werden hauptsächlich die Erstpreisauktion und die Zweitpreisauktion studiert werden. Definition 4.6 und der Satz 4.14 zum Einkommensäquivalenztheorem sind allerdings viel allgemeiner. Auch wenn man sich für alle 4 Auktionsformen in Definition 4.1 interessiert, so reicht es wegen Lemma 4.3, sich auf Erstpreisauktion und Zweitpreisauktion zu konzentrieren.

Hier wird nur der Fall von *privaten Werten* betrachtet, und es wird nur die Versteigerung einzelner Güter untersucht. Die folgende Definition formalisiert diesen Rahmen und macht weitere vereinfachende Annahmen. Natürlich geht die Theorie viel weiter.

Wie oben gesagt, läßt sich die Auktionstheorie innerhalb der Spieltheorie als Spezialfall von extensiven Spielen mit unvollständiger Information und Bayesschen Nash-Gleichgewichten auffassen. Aber dieser Begriffsapparat wurde hier nicht vorbereitet und wird hier nicht benutzt. Auktionsformen und ihre Gleichgewichte werden hier direkt studiert.

Definition 4.6 Eine *symmetrische Standard-Auktion* mit *privaten Werten* ist wie folgt definiert.
(a) Es steht ein unteilbares Gut zum Verkauf, und m Bieter $i \in \mathcal{A} = \{1, ..., m\}$ sind interessiert. Die Bieter sollen risiko-neutral sein.
(b) Für jeden hat das Gut einen *Wert* x_i. Es besteht keine Abhängigkeit zwischen den Werten verschiedener Bieter, d.h. man ist im Fall *privater Werte*. Jeder Bieter i kennt den Wert x_i, aber über die Werte x_j mit $i \neq j$ weiß er nur folgendes.
Für ihn sind sie Zufallsvariablen $X_j := \mathrm{id} : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ mit folgenden Daten: $\Omega = [0, \omega]$ und $\omega \in \mathbb{R}_{>0}$ oder $\Omega = [0, \infty)$ (dann schreibt man $\omega = \infty$), $\mathcal{B} =$ die Borel-σ-Algebra auf Ω und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß der Gestalt $\mu(B) = \int_B f(x)dx$ für $B \in \mathcal{B}$ mit $f : \Omega \to (0, 1]$ stetig. Die *Dichte* f ist also überall positiv. Daher ist die *Verteilungsfunktion* $F(x) := \int_0^x f(y)dy$ streng monoton steigend mit $F(0) = 0$ und $F(\omega) = 1$.
Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_m$ haben also alle die gleiche Verteilung, daher heißt die Auktion *symmetrisch*. Weiter sollen sie unabhängig sein. Ferner soll auch im Fall $\omega = \infty$ (sonst gilt es sowieso) $E[X_i] < \infty$ sein.
(c) Jeder Spieler i hat als Strategie eine Abbildung $\beta_i : [0, \omega] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sein Angebot beim Wert x_i ist $\beta_i(x_i)$.
(d) Der Bieter mit dem höchsten Angebot bekommt das Gut. Falls mehrere Bieter gleich hohe höchste Angebote gemacht haben, bekommt jeder von ihnen das Gut mit gleicher Wahrscheinlichkeit. Diese Regel macht die Auktion zu einer *Standard-Auktion*. Wieviel er bezahlen muß, wird mit einem Mechanismus, der hier nicht festgelegt wird, aus der Information aller Angebote bestimmt. Dieser Mechanismus gibt gerade die Auktionsform.

Die Erstpreisauktion und die Zweitpreisauktion sind Standard-Auktionen. Im folgenden werden bei ihnen auch die weiteren Annahmen der Definition 4.6 gemacht, d.h. die Werte X_i sind (jeweils für die anderen Spieler) unabhängige Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung mit stetiger positiver Dichte.

Im folgenden wird erst die Zweitpreisauktion betrachtet, danach die Erstpreisauktion. Denn bei der Zweitpreisauktion hat man ein einfaches und starkes Ergebnis über eine gute Strategie. Das ist auch der Grund, warum die (auf den ersten Blick komische) Zweitpreisauktion überhaupt betrachtet wird. Andererseits ist die Zweitpreisauktion nach Lemma 4.3 (b) zur englischen aufsteigenden Auktion äquivalent, und die ist seit langer Zeit populär.

Theorem 4.7 *(Zweitpreisauktion)*
(a) Bei einer Zweitpreisauktion ist für jeden Spieler i die Strategie $\beta_i = \mathrm{id} =: \beta^{II}$, d.h. $\forall\, x \in [0, \omega]$ $\beta_i(x) = x$, eine schwach dominante Strategie. Das heißt, den Wert selber als Angebot zu nehmen, ist optimal, egal welchen Strategien die anderen Spieler folgen.

(b) Sei $Y_1 := \max(X_2, ..., X_m)$. *Die Verteilungsfunktion* $G(y)$ *zur Zufallsvariable* Y_1 *ist* $G(y) = F(y)^{m-1}$. *Die zugehörige Dichte wird* $g(y) := (F(y)^{m-1})'$ *genannt.*

(c) Wenn alle Bieter bei der Zweitpreisauktion den Wert selber als Angebot nehmen, ist die erwartete Zahlung für Bieter 1 im Fall von $X_1 = x$

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= G(x) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < x] \\ &= \int_0^x y \cdot g(y) dy \\ &= G(x) \cdot x - \int_0^x G(y) dy. \end{aligned}$$

Beweis: Wir können uns auf den Bieter 1 konzentrieren.
(a) Die Angebote der anderen Bieter werden $b_2, ..., b_m$ genannt. Spieler 1 kennt sie zum Zeitpunkt der Abgabe seines Gebotes b_1 nicht. Sei $p_1 := \max_{j \neq 1} b_j$ das höchste der anderen Angebote.
Der Bieter 1 bekommt das Gut genau dann, wenn $b_1 > p_1$ ist (der Fall $b_1 = p_1$ wird vernachlässigt). Und dann muß er p_1 zahlen.
Wie unterscheidet sich die Wahl $b_1 = x_1$ von einer Wahl $b_1 < x_1$? Sie haben fast immer die gleiche Wirkung (Spieler 1 bekommt das Gut oder nicht, und wenn er es bekommt, muß er p_1 zahlen). Sie unterscheiden sich nur, wenn bei der Wahl $b_1 < x_1$ auch $b_1 < p_1 < x_1$ gilt. Dann ist die Wahl $b_1 < x_1$ schlechter, denn da bekommt Spieler 1 das Gut nicht, während er es bei der Wahl $b_1 = x_1$ bekommen würde und den Gewinn $x_1 - p_1$ machen würde.
Wie unterscheidet sich die Wahl $b_1 = x_1$ von einer Wahl $b_1 > x_1$? Auch sie haben fast immer die gleiche Wirkung. Sie unterscheiden sich nur, wenn bei der Wahl $b_1 > x_1$ auch $b_1 > p_1 > x_1$ gilt. Dann ist die Wahl $b_1 > x_1$ schlechter, denn da bekommt Spieler 1 das Gut und macht den negativen Gewinn $x_1 - p_1 < 0$, während er es bei der Wahl $b_1 = x_1$ nicht bekommen würde.
Daher ist $\beta_1 = \mathrm{id}$ eine schwach dominante Strategie.

(b) Das ist elementare Wahrscheinlichkeitstheorie und benutzt (in der dritten Gleichung), dass die Zufallsvariablen unabhängig sind.

$$\begin{aligned} G(y) &= P(Y_1 < y) \\ &= P(\text{alle } X_2, ..., X_m < y) \\ &= \prod_{j=2}^m P(X_j < y) \\ &= \prod_{j=2}^m F(y) = F(y)^{m-1}. \end{aligned}$$

(c) Die zweite Gleichung ist die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit $E[Y_1 \,|\, Y_1 < x]$. Die dritte Gleichung folgt mit partieller Integration. Die erste Gleichung folgt so,

$$\begin{aligned} m^{II}(x) &= P(\text{mit dem Angebot } x \text{ gewinnen}) \\ &\quad \cdot E[\text{zweithöchstes Angebot} \,|\, x \text{ ist das höchste Angebot}] \\ &= G(x) \cdot E[\text{zweithöchster Wert} \,|\, x \text{ ist der höchste Wert}] \\ &= G(x) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < x]. \end{aligned}$$

□

Bei der Erstpreisauktion ist die Wahl $\beta = \mathrm{id}$ schlecht, denn damit garantiert ein Bieter sich selbst den Gewinn 0, ob er nun das Gut bekommt oder nicht. Er sollte weniger bieten. Je weniger er bietet, desto höherer wird sein Gewinn, falls er das Gut bekommt, aber desto unwahrscheinlicher wird, dass er es bekommt. Diese beiden Effekte muß er abwägen. Hier ist wichtig, dass er risiko-neutral ist. Bei der Erstpreisauktion hat man keine schwach dominante Strategie, aber man hat noch in folgendem Sinn gute Strategien.

Definition 4.8 Bei einer symmetrischen Standard-Auktion mit privaten Werten ist ein *symmetrisches Gleichgewicht* eine Abbildung $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, so dass kein Bieter i eine bessere Strategie als $\beta_i = \beta$ hat, falls alle anderen Bieter j $\beta_j = \beta$ spielen.

Theorem 4.9 *(Erstpreisauktion) (a) Unter allen Strategien $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, bei denen β streng monoton wachsend und differenzierbar ist und $\beta(0) = 0$ erfüllt, gibt es eine einzige, die ein symmetrisches Gleichgewicht ist. Dies ist die Abbildung β^I mit*

$$\beta^I(x) = E[Y_1 \,|\, Y_1 < x] = \frac{1}{G(x)} \int_0^x y \cdot g(y) dy = x - \int_0^x \frac{G(y)}{G(x)} dy.$$

Die letzte Formel gibt an, um wieviel das Angebot $\beta^I(x)$ niedriger als x ist.

(b) Wenn alle Bieter bei der Erstpreisauktion der Strategie β^I folgen, ist die erwartete Zahlung für Bieter 1 im Fall von $X_1 = x$

$$m^I(x) \quad = \quad G(x) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < x] = m^{II}(x).$$

Beweis: (a) Zuerst wird die Eindeutigkeit bewiesen. Sei $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ streng monoton wachsend und differenzierbar mit $\beta(0) = 0$. Bieter 1 weiß, dass alle anderen Bieter dieser Strategie folgen. Sein eigener Wert des Gutes ist x, und er macht das Angebot b. Wann ist es optimal für ihn?
Er bekommt das Gut, falls b das höchste Angebot ist, wenn also

$$\begin{aligned} b &> \max_{j \geq 2} \beta(X_j) \\ &= \beta(\max_{j \geq 2} X_j) = \beta(Y_1) \end{aligned}$$

gilt. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist $G(\beta^{-1}(b))$. Sein erwarteter Gewinn ist daher

$$G(\beta^{-1}(b)) \cdot (x-b).$$

Bei optimalem b muß diese Zahlung als Funktion in b ein Maximum haben, also muß dort ihre erste Ableitung nach b verschwinden,

$$\begin{aligned} 0 &= g(\beta^{-1}(b)) \cdot (\beta^{-1})'(b) \cdot (x-b) - G(\beta^{-1}(b)) \\ &= \frac{g(\beta^{-1}(b))}{\beta'(\beta^{-1}(b))} \cdot (x-b) - G(\beta^{-1}(b)). \end{aligned}$$

Hier wurde

$$\beta \circ \beta^{-1} = \mathrm{id}, \quad 1 = (\beta \circ \beta^{-1})'(b) = \beta'(\beta^{-1}(b)) \cdot (\beta^{-1})'(b)$$

benutzt.

Nun wird angenommen, daß β ein symmetrisches Gleichgewicht ist. Dann ist $b = \beta(x)$. Dann wird die gerade bewiesene Gleichung zur Differentialgleichung für β,

$$xg(x) \overset{!}{=} G(x)\beta'(x) + g(x)\beta(x) \overset{klar}{=} \frac{d}{dx}(G(x)\beta(x)).$$

Integration und die Bedingung $\beta(0) = 0$ liefern

$$\beta(x) \overset{!}{=} \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy \overset{5.7(c)}{=} E[Y_1 \,|\, Y_1 < x].$$

Dies beweist die Eindeutigkeit, β^I ist der einzige Kandidat für ein symmetrisches Gleichgewicht unter den streng monoton wachsenden und differenzierbaren Funktion $\beta : [0, \omega] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ mit $\beta(0) = 0$.

Nun wird bewiesen, daß β^I tatsächlich ein symmetrisches Gleichgewicht ist. Spieler 1 weiß, dass alle anderen Bieter der Strategie β^I folgen. Sein eigener Wert des Gutes ist x, und er macht das Angebot b. Wann ist es optimal für ihn? Oben wurde gezeigt, dass $\beta^I(x)$ das einzige extremale Angebot ist (und damit der einzige Kandidat für ein optimales Angebot), aber es ist noch nicht klar, ob es ein optimales oder ein schlechtestes Angebot für Spieler 1 ist.

Sei $z := (\beta^I)^{-1}(b)$, also $b = \beta^I(z) = E[Y_1 \,|\, Y_1 < z]$. Die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler 1 das Gut bekommt, ist wie oben $G(z)$. Der erwartete Gewinn von Spieler 1 ist

$$\begin{aligned} \Pi(b, x) &= G(z) \cdot (x-b) = G(z) \cdot (x - \beta^I(z)) \\ &= G(z)x - G(z) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < z] \\ &= G(z)x - \int_0^z yg(y)dy \\ &= G(z)x - G(z)z + \int_0^z G(y)dy \\ &= G(z) \cdot (x-z) + \int_0^z G(y)dy. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit dem Angebot $\beta^I(x)$ gibt die Differenz

$$\Pi(\beta(x), x) - \Pi(b, x) = G(z)(z - x) - \int_x^z G(y)dy.$$

Bei $z > x$ ist sie wegen $G(z) > G(y)$ für $y \in [x, z]$ positiv, bei $z < x$ ist sie wegen $G(z) < G(y)$ für $y \in [z, x]$ positiv. Daher ist für Spieler 1 das beste Angebot $\beta^I(x)$. Daher ist seine beste Strategie β^I. Daher ist β^I ein symmetrisches Gleichgewicht.

(b) Es wird angenommen, dass alle Spieler der Strategie β^I folgen. Im Beweis von (a) war gezeigt worden, dass dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Spieler 1 das Gut bekommt, $G(x)$ ist. In dem Fall muß er sein Angebot zahlen. Das ist $\beta^I(x)$, wenn das Gut für ihn den Wert x hat. Daher ist dann die erwartete Zahlung für Bieter 1

$$m^I(x) = G(x) \cdot \beta^I(x) = G(x) \cdot E[Y_1 \,|Y_1 < x] = m^{II}(x).$$

□

Beispiele 4.10 (i) $[0, \omega] = [0, 1]$, $f(x) = 1$. Dann ist $F(x) = x$, $G(x) = x^{m-1}$,

$$\beta^I(x) = \frac{1}{x^{m-1}} \int_0^x y \cdot (m-1)y^{m-2}dy = \frac{m-1}{m} \cdot x.$$

Hier ist $\beta^I(x)$ linear in x, und bei vielen Bietern (d.h. m groß) ist es nur knapp kleiner als x.

(ii) $[0, \omega] = [0, \infty)$, $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ für ein $\lambda > 0$, $m = 2$. Dann ist $G(x) = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, $g(x) = f(x)$,

$$\begin{aligned}
\beta^I(x) &= x - \frac{1}{1 - e^{-\lambda x}} \int_0^x (1 - e^{-\lambda y})dy \\
&= x - \frac{1}{1 - e^{-\lambda x}} \left[y + \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda y} \right|_0^x \\
&= \frac{1}{1 - e^{-\lambda x}} \left[x(1 - e^{-\lambda x}) - x - \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} + \frac{1}{\lambda} \right] \\
&= \frac{1}{\lambda} - \frac{x e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda x}}.
\end{aligned}$$

Dies kann man mit der Abschätzung

$$\beta^I(x) = E[Y_1 \,|\, Y_1 < x] \leq E(Y_1) = \beta^I(\infty) = \frac{1}{\lambda}$$

vergleichen. Auch bei sehr hoher Bewertung x wird der Bieter nicht mehr als $\frac{1}{\lambda}$ bieten, sondern ein ganz klein wenig weniger. Zwar riskiert er, einen hohen

Gewinn zu verpassen, wenn er das Gut nicht bekommt. Allerdings weiß er, dass der andere Bieter der gleichen Strategie folgt. Daher ist bei großem x seine Chance, das Gut zu bekommen, auch mit dem Angebot knapp unter $\frac{1}{\lambda}$ sehr hoch. Als risiko-neutraler Spieler ist er damit zufrieden.

Das nächste Resultat behandelt den Ertrag des Verkäufers.

Theorem 4.11 *(a) Der erwartete Ertrag des Verkäufers ist bei Erstpreisauktion und Zweitpreisauktion gleich. Er ist* $m \cdot E[m^I(X)]$.

(b) Sei Y_2 *die* zweite Ordnungsstatistik, *sie ist der Wert der zweithöchsten der Zufallsvariablen* $X_1, ..., X_m$. *Ihre Verteilungsfunktion* G_2 *und ihre Dichte* g_2 *sind*

$$\begin{aligned} G_2(x) &= mF(x)^{m-1} - (m-1)F(x)^m, \\ g_2(x) &= m(m-1)(1-F(x))F(x)^{m-2}f(x) = m(1-F(x)) \cdot g(x). \end{aligned}$$

(c) Der erwartete Ertrag des Verkäufers ist

$$m \cdot E[m^I(X)] = E[Y_2].$$

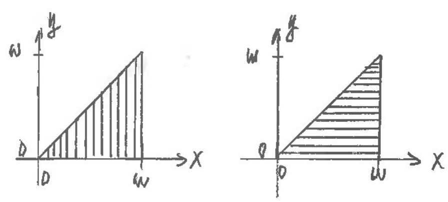
Beweis: (a) und (c) Wegen Theorem 4.9 ist die erwartete Zahlung für jeden Bieter mit Bewertung x des Guts sowohl bei Erstpreisauktion als auch bei Zweitpreisauktion

$$m^I(x) = m^{II}(x) = G(x) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < x] = \int_0^x yg(y)dy.$$

Der erwartete Ertrag des Verkäufers ist einfach die Summe über die Erwartungswerte der erwarteten Zahlungen aller Bieter, sie ist

$$\begin{aligned} m \cdot E[m^I(X)] &= m \cdot \int_0^\omega m^I(x) \cdot f(x)dx \\ &= m \cdot \int_0^\omega \left(\int_0^x yg(y)dy \right) \cdot f(x)dx. \end{aligned}$$

Mit Vertauschung der Integrationen, siehe Bild,



erhält man

$$\begin{aligned} m \cdot E[m^I(X)] &= m \cdot \int_0^\omega \left(\int_y^\omega f(x)dx \right) yg(y)dy \\ &= m \cdot \int_0^\omega (1 - F(y)) \cdot yg(y)dy \\ &\overset{(b)}{=} \int_0^\omega y \cdot g_2(y)dy = E[Y_2]. \end{aligned}$$

(b) Das ist elementare Wahrscheinlichkeitstheorie. Die Verteilungsfunktion $G_2(x)$ der zweiten Ordnungsstatistik ergibt sich so: Wenn die zweithöchste Zufallsvariable kleiner als x ist, sind entweder alle $X_1, ..., X_m$ kleiner als x, oder eins ist größer und alle anderen sind kleiner. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten ist

$$\begin{aligned} G_2(x) &= F(x)^m + m \cdot (1 - F(x)) \cdot G(x) \\ &= F(x)^m + m(1 - F(x))F(x)^{m-1} = mF(x)^{m-1} - (m-1)F(x)^m. \end{aligned}$$

Daher und wegen $g(x) = G'(x) = (F(x)^{m-1})' = (m-1)F(x)^{m-2}f(x)$ ist die Dichte

$$\begin{aligned} g_2(x) &= G_2'(x) = m(m-1)(1 - F(x))F(x)^{m-2}f(x) \\ &= m(1 - F(x)) \cdot g(x). \end{aligned}$$

□

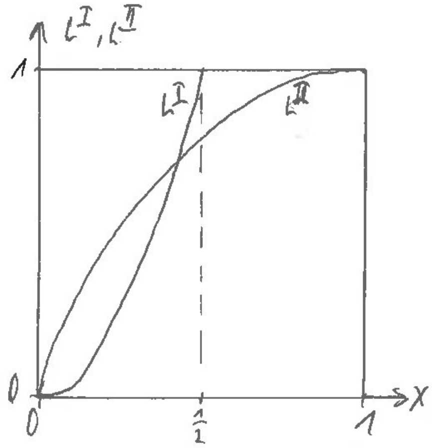
Bemerkungen/Beispiele 4.12 (i) Zwar sind bei Erstpreisauktion und Zweitpreisauktion die erwarteten Erträge gleich. Aber sie sind nur die Erwartungswerte der erzielten Preise R^I und R^{II}. Es seien $L^I(x)$ und $L^{II}(x)$ die Verteilungsfunktionen der erzielten Preise. Sie sind verschieden. Bei der Erstpreisauktion variiert der erzielte Preis nur zwischen 0 und $E[Y_1]$. Bei der Zweitpreisauktion variiert er zwischen 0 und ω. Die Zweitpreisauktion ist riskanter für den Verkäufer. Tatsächlich kann man eine Beziehung zwischen L^I und L^{II} formulieren, die dieses höhere Risiko in präziserer Weise faßt: L^{II} ist ein *mean preserving spread* von L^I. Das wird in [Kr02, Proposition 2.4] ausgeführt.

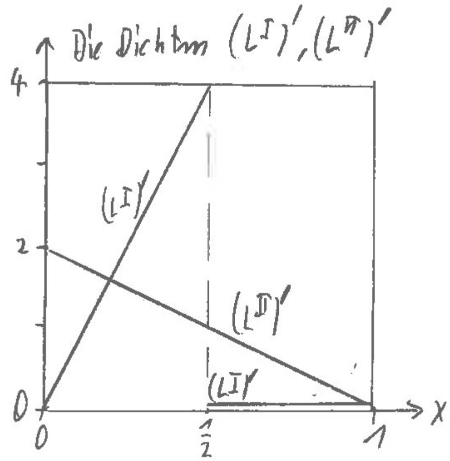
(ii) Hier beschränken wir uns auf das einfachste mögliche Beispiel. Es sei $[0, \omega] = [0, 1]$, $f(x) = 1$, $F(x) = x$, $m = 2$. Dann ist $G(x) = F(x), g(x) = f(x)$, und

$$\beta^I(x) = \frac{1}{G(x)} \int_0^x yg(y)dy = \frac{1}{x} \int_0^x ydy = \frac{1}{2}x.$$

L^I und L^{II} lassen sich so berechnen,

$$\begin{aligned} L^I(x) &= P(\max(\beta^I(x_1), \beta^I(x_2)) < x) \\ &= P(\max(x_1, x_2) < 2x) = P(Y_1^{(2)} < 2x) = F(2x)^2 \\ &= \min(1, 4x^2), \\ L^{II}(x) &= P(\min(x_1, x_2) < x) = P(Y_2 < x) = G_2(x) \\ &= 2F(x) - F(x)^2 = 2x - x^2. \end{aligned}$$





Aber der erwartete Ertrag ist gleich, wie er es auch sein muß,

$$\begin{aligned} \int_0^1 x(\min(1, 4x^2))' dx &= \int_0^{1/2} 8x^2 dx = \left[\frac{8}{3}x^3\right|_0^{1/2} = \frac{1}{3}, \\ \int_0^1 x(2x - x^2)' dx &= \int_0^1 2(x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{2}{3}x^3\right|_0^1 = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Bemerkungen 4.13 (Mindestpreise)
(i) In [Kr02, 2.5] werden Mindestpreise behandelt. Hier werden nur die zentralen Ergebnisse genannt.
Nun wird die Situation dadurch komplizierter, dass der Verkäufer einen Mindestpreis $r \in [0, \omega]$ ansetzt. Falls ein Bieter das Gut bekommt, muß er mindestens diesen Preis zahlen. Es kann passieren, dass das Gut beim Verkäufer bleibt.
Bei der Zweitpreisauktion bleibt Theorem 4.7 ohne Änderungen gültig, es ist weiterhin eine schwach dominante Strategie, den Wert als Angebot zu nehmen.
Bei der Erstpreisauktion wird $\beta^I(x)$ modifiziert, es ist nun für $x \geq r$

$$\beta^I(x, r) = E[\max(Y_1, r) \,|\, Y_1 < x] = r\frac{G(r)}{G(x)} + \frac{1}{G(x)} \int_r^x y g(y) dy.$$

Wie vorher (im Fall $r = 0$) sind die erwarteten zu zahlenden Preise $m^I(x)$ und $m^{II}(x)$ eines Bieters mit Bewertung x gleich, sie sind nun

$$m^I(x,r) = m^{II}(x,r) = rG(r) + \int_r^x yg(y)dy \quad \big(= G(x) \cdot \beta^I(x)\big).$$

Der erwartete Ertrag für den Verkäufer ist weiterhin $m \cdot E[m^I(x,r)] = m \cdot E[m^{II}(x,r)]$.
Es wird auch angenommen, dass das Gut einen Wert x_0 für den Verkäufer hat. Natürlich sollte er einen Mindestpreis $r \geq x_0$ ansetzen. Tatsächlich sollte er $r > x_0$ ansetzen. Das wird manchmal *Ausschlußprinzip* (*exclusion principle*) genannt: Es lohnt sich, einige Bieter, nämlich alle mit Werten unterhalb von r, auszuschließen, auch wenn diese Werte größer als x_0 sind.

(ii) Im einfachsten möglichen Beispiel 4.12 (ii) ist der optimale Mindestpreis $r = \frac{1}{2}$, und dann ist der erwartete Ertrag für den Verkäufer $\frac{5}{12}\big(> \frac{1}{3}\big)$.

(iii) Einen Mindestpreis kann man äquivalent auch durch eine Teilnahmegebühr modellieren.

(iv) Die Effizienz kann beim Mindestpreis verloren gehen. Denn wenn der Verkäufer auf dem Gut sitzen bleibt, obwohl es Bieter mit Wert größer als der Mindestpreis gibt, ist das nicht effizient.

(v) Manchmal ist es schwierig, den Ansatz mit dem Mindestpreis glaubwürdig zu machen, denn er erfordert, dass das Gut eventuell nicht verkauft wird. Bei einer Tendenz zur Panik auf Seiten des Verkäufers ist das nicht glaubwürdig. Manchmal, vor allem beim Verkauf von Kunstwerken, wird bekannt gegeben, dass es einen Mindestpreis gibt, aber seine Höhe bleibt geheim. Das ist nur sinnvoll, wenn der Verkäufer erwartet, dass er das Gut später noch besser verkaufen kann, falls er es in der anstehenden Auktion nicht verkaufen kann.

Der letzte Satz des Kapitels ist bemerkenswert allgemein. Der zweite Teil folgt aus dem ersten, aber der zweite Teil hat dem Satz den Namen gegeben. Der Satz hätte früher formuliert und bewiesen werden können. Aber er läßt sich besser würdigen, wenn man vorher ein paar konkrete Auktionsformen kennengelernt hat.

Theorem 4.14 *(Einkommensäquivalenztheorem)*
Sei eine Auktionsform gegeben, die alle Eigenschaften einer symmetrischen Standard-Auktion mit privaten Werten in Definition 4.6 erfüllt und die darüber hinaus mit einem Mechanismus versehen ist, der sagt, wieviel der Bieter, der das Gut bekommt, bezahlen muß.
Sei $\beta : [0,\omega] \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ ein symmetrisches Gleichgewicht wie in Definition 4.8, und sei β streng monoton wachsend. $m^A(x)$ sei der Erwartungswert der Zahlung, die der Bieter, der das Gut bekommt und ihm den Wert x beimißt,

bei diesem symmetrischen Gleichgewicht leisten muß. Es wird angenommen, dass er $m^A(0) = 0$ erfüllt.
(a) Dann ist $m^A(x)$ unabhängig von dem Mechanismus der Auktionsform, der die konkrete Zahlung in Abhängigkeit von den Angeboten festlegt. Es ist

$$m^A(x) = G(x) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < x] = \int_0^x yg(y)dy = G(x) \cdot x - \int_0^x G(y)dy.$$

(b) Der Erwartungswert des Ertrages, den der Verkäufer bekommt, ist $m \cdot E[m^A(X)] = E[Y_2]$, also ist er auch unabhängig vom Mechanismus der Auktionsform.

Beweis: (b) folgt (wie im Beweis von Theorem 4.11 (a)) sofort aus (a) und aus Theorem 4.11 (c). Es bleibt (a) zu beweisen. Wir können uns auf den Bieter 1 beschränken.
Bieter 1 geht davon aus, dass alle anderen Bieter der Strategie β folgen. Dann sagt das symmetrische Gleichgewicht, dass für ihn kein Angebot $\beta(z)$ für irgendein $z \in [0, \omega]$ besser ist als $\beta(x)$. Diese Bedingung wird nun in eine Gleichung umgesetzt.
Ein Angebot $\beta(z)$ ist das höchste Angebot, wenn $\beta(z) > \beta(Y_1)$ ist, oder äquivalent (wegen der strengen Monotonie von β) wenn $z > Y_1$ ist. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist wie oben $G(z)$. Der Erwartungswert seines Gewinns ist beim Angebot $\beta(z)$ also

$$\Pi^A(z, x) := G(z) \cdot x - m^A(z).$$

Im Maximum $z = x$ gilt

$$0 = \frac{\partial}{\partial z}\Pi^A(z, x)|_{z=x} = \Big(g(z) \cdot x - \frac{d}{dz}m^A(z)\Big)_{z=x} = xg(x) - \frac{d}{dx}m^A(x).$$

Integration liefert

$$\begin{aligned} m^A(x) &= m^A(0) + \int_0^x yg(y)dy = \int_0^x yg(y)dy \\ &= G(x) \cdot E[Y_1 \,|\, Y_1 < x]. \end{aligned}$$

□

Auktionstheorie wird in vielen Lehrbüchern der Spieltheorie behandelt, unter anderem recht ausführlich in [BEG10]. Ein frühes Werk, das die Auktionstheorie mit begründet hat, ist [Vi61]. Die Arbeit [My81] gibt eine allgemeine Version des Einkommensäquivalenztheorems. Das Buch [Kl04] berichtet über Literatur, Theorie und Praxis-Erfahrungen. Insbesondere war Paul Klemperer an einer sehr erfolgreichen Auktion 2000 in Großbritannien beteiligt, bei der Mobilfunk-Lizenzen versteigert wurden. Das Buch berichtet auch darüber. Das Buch [Mi04] kenne ich nicht, aber Paul Milgrom ist einer der führenden Vertreter der Auktionstheorie. Dieses Kapitel 4 folgt weitgehend den ersten zweieinhalb Kapiteln im Buch [Kr02].

Literatur

[BEG10] S.K. Berninghaus, K.-M. Ehrhart, W. Güth: Strategische Spiele. Eine Einführung in die Spieltheorie. Springer, 3. Auflage 2010.

[Kl04] P. Klemperer: Auctions: Theory and practice. Princeton University Press, 2004.

[Kr02] V. Krishna: Auction theory. Academic Press, 2002.

[Mi04] P. Milgrom: Putting auction theory to work. Cambridge University Press, 2004.

[My81] R.B. Myerson: Optimal auction design. Mathematics of Operations Research **6.1** (1981), 58–73.

[Vi61] W. Vickrey: Counterspeculation, auctions, and competitive sealed tenders. J. Finance **16** (1961), 8–37.

5 Wahlsysteme und Wahlgleichgewichte

Wahlen sind ein wichtiger Teil von Demokratien. Es gibt verschiedene Möglichkeiten, Wahlen zu organisieren und Gewinner zu definieren. Bei der Auswahl einer solchen Möglichkeit muss man vieles berücksichtigen, insbesondere das Gremium, das gewählt werden soll, die Menge der möglichen Kandidaten, die Wähler.

In der Arbeit [MW93] von Myerson und Weber werden drei verschiedene *Wahlsysteme* betrachtet, Mehrheitswahl, Zustimmungswahl und Ranking-Wahl. Weiter beziehen sie Umfragen, die vor der Wahl stattfinden, und ihre Wirkung mit ein und kommen damit zu einem Gleichgewichtsbegriff, den *Wahlgleichgewichten*. Sie beweisen allgemein die Existenz von Wahlgleichgewichten (unten Theorem 5.3), mit dem Fixpunktsatz von Kakutani, also mit Standardargumenten für Gleichgewichte in der Spieltheorie. Vor allem aber diskutieren sie an einem Beispiel die drei Wahlsysteme oben. Danach erweitern sie das Modell. Am Ende diskutieren sie in Prosa, welches Wahlsystem wie anfällig für Mißbrauch bei den Umfragen ist.

Die Zustimmungswahl ist die beste. Sie ist am wenigsten anfällig gegen Beeinflussung durch (eventuell gefälschte) Umfragen und drückt am sichersten den Willen der Mehrheit aus.

In diesem Kapitel wird ein großer Teil von [MW93] ausgearbeitet, und zwar detaillierter als in der Arbeit selbst. [MW93] ist wie alle Arbeiten von Myerson konzise, elegant, aussagekräftig und enthält gute Ansätze und relevante Ergebnisse. Myerson hatte 2007 zusammen mit L. Hurwicz und E. Maskin den Wirtschaftsnobelpreis für Forschungen in der Mechanismus-Design-Theorie bekommen.

Definition 5.1 (a) Ein *Wahlsystem* ist ein 4-Tupel (K, T, f, V) mit den folgenden Eigenschaften.

$k \in \mathbb{N}$, und $K = \{1, ..., k\}$ ist die Menge der wählbaren Kandidaten.

$T \subset \mathbb{R}^k$ ist eine endliche Menge von möglichen Nutzenvektoren der Wähler. Bei $u = (u_1, ..., u_k) \in T$ ist also u_i der Nutzen, den der Kandidat i im Fall seiner Wahl einem Wähler mit Nutzenvektor u bringen würde.

$f : T \to [0, 1]$ mit $\sum_{u \in T} f(u) = 1$ ist eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf T. Hier ist $f(u)$ der Anteil der Wähler mit Nutzenvektor u innerhalb der gesamten Wählerschaft.

$V \subset \mathbb{Z}^k_{\geq 0}$ ist eine endliche Menge von *Wahlscheinen*. Sie bestimmt das Wahlsystem. (Beispiele kommen in (c).)

(b) In der Situation von (a) ist ein *Wahlergebnis* eine Abbildung
$\mu : V \times T \to [0, 1]$ mit $\sum_{v \in V} \mu(v, u) = f(u)$ für alle $u \in T$. Es ist also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf $V \times T$, die die Wahrscheinlichkeitsverteilung f auf T verfeinert. $\mu(v, u)$ ist der Anteil innerhalb der gesamten

Wählerschaft von den Wählern mit Nutzenvektor u, die bei der Wahl den Wahlschein v benutzt haben.
Dann ist $\mu(v,T) := \sum_{u\in T}\mu(v,u)$ der Anteil innerhalb der Wählerschaft von allen Wählern, die bei der Wahl den Wahlschein v benutzt haben. Der Anteil der Stimmen des Politikers i bei der Wahl ist

$$S_i(\mu) := \sum_{v\in V} v_i\cdot\mu(v,T) = \sum_{(v,u)\in V\times T} v_i\cdot\mu(v,u).$$

Gewinner der Wahl sind genau die Politiker i mit maximalem $S_i(\mu)$.

(c) In der Situation in (a) werden besonders die folgenden drei Wahlsysteme betrachtet.
Mehrheitswahl:

$$\begin{aligned} V &= \{\mathbf{0}, e_1, ..., e_k\} \quad \text{bei } e_j = (\delta_{ij})_{i=1,...,k}, \mathbf{0} = (0,...,0). \\ &= \{\mathbf{0}\}\cup\{(v_1,...,v_k)\in\{0,1\}^k \mid \sum_{i=1}^k v_i = 1\}. \end{aligned}$$

Zustimmungswahl: $V = \{0,1\}^k$.
Ranking-Wahl (Borda-Wahl):

$$V = \{\mathbf{0}\}\cup\{(v_1,...,v_k)\,|\,\{v_1,...,v_k\} = \{0,1,...,k-1\}\}.$$

(d) Beispiel: Im Fall $k=3$ ist

$$\begin{aligned} V &= \{(0,0,0),(1,0,0,),(0,1,0,),(0,0,1)\} \\ &\quad \text{bei der Mehrheitswahl,} \\ V &= \{(0,0,0),(1,0,0,),(0,1,0,),(0,0,1),(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\} \\ &\quad \text{bei der Zustimmungswahl,} \\ V &= \{(0,0,0),(2,1,0),(2,0,1),(1,2,0),(1,0,2),(0,1,2),(0,2,1)\} \\ &\quad \text{bei der Ranking-Wahl.} \end{aligned}$$

Definition 5.2 Sei (K,T,f,V) ein Wahlsystem (also wie in Definition 5.1 (a)). Sei dann $H := \{(i,j)\,|\,i,j\in K, i<j\}$.

(a) Ein *Umfragewert* ist ein Tupel

$$p = (p_{ij})_{(i,j)\in H} \quad \text{mit} \quad p_{ij}\in[0,1] \text{ und } \sum_{(i,j)\in H} p_{ij} = 1,$$

also eine Wahrscheinlichkeitsverteilung auf H. Deutung: p_{ij} ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Wähler laut Umfrage vermuten, dass die Wahl ein Kopf-an-Kopf Rennen zwischen den Politikern i und j sein wird.

Eine Notation: Im Fall $i > j$ wird $p_{ij} := p_{ji}$ gesetzt.

(b) Ein Wähler will natürlich seine(n) Lieblingskandidaten fördern. Aber er möchte auch einen Wahlschein abgeben, der eine gewisse Chance hat, die Wahl zu beeinflussen. Daher ist es interessant, wer die voraussichtlichen Spitzenkandidaten sind. Dazu trifft ein Umfragewert eine Vorhersage. Der *erwartete Nutzen* eines Wahlscheins v für einen Wähler mit Nutzenvektor u und bei einem Umfragewert p wird definiert als

$$\begin{aligned} G(p,v,u) &:= \sum_{(i,j)\in H} p_{ij}\cdot(v_i - v_j)(u_i - u_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_i \sum_{j\neq i} p_{ij}\cdot(u_i - u_j) \\ &= \sum_{i=1}^{k} v_i \cdot r_i(p,u), \\ \text{bei } r_i(p,u) &:= \sum_{j\neq i} p_{ij}\cdot(u_i - u_j). \end{aligned}$$

(c) Bei einem gegebenen Umfragewert p ist die Menge der Wahlergebnisse μ, die durch p *gerechtfertigt werden*, die Menge

$$R(p) \;:=\; \{\mu \text{ Wahlergebnis} \,|\, \Big(\mu(v,u) > 0 \Rightarrow G(p,v,u) = \max_{w\in V} G(p,w,u)\Big)\}.$$

Da werden nur Wahlscheine v abgegeben ($\mu(v,u) > 0$), von denen sich die Wähler maximalen Nutzen erwarten ($G(p,v,u)$ maximal bezüglich v).

(d) Bei einem gegebenen Wahlergebnis μ und einem beliebigen $\varepsilon \in (0,1]$ ist die Menge $Q^\varepsilon(\mu)$ der Umfragewerte p, die die *Ordnungsbedingung* bezüglich p erfüllen, die Menge

$$\begin{aligned} Q^\varepsilon(\mu) \;:=\; &\{p \text{ Umfragewert} \,|\, \text{alle } p_{ij} \geq \frac{\varepsilon^{k^2}}{k^2} (> 0), \\ &\Big(S_i(\mu) < S_j(\mu) \Rightarrow p_{ih} \leq \varepsilon \cdot p_{jh} \;\forall\; h \in K - \{i,i\}\Big)\}. \end{aligned}$$

(e) Ein *Wahlgleichgewicht* ist ein Wahlergebnis μ, für das es eine Folge $((\varepsilon_n, p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ von Paaren mit $\varepsilon_n \in (0,1]$ und Umfragewerten p_n gibt, die $\varepsilon_n \to_{n\to\infty} 0$ und $\mu \in R(p_n)$, $p_n \in Q^{\varepsilon_n}(\mu)$ erfüllen.

Theorem 5.3 *Sei (K,T,f,V) ein Wahlsystem. Es gibt Wahlgleichgewichte.*

Der Beweis benutzt Standardargumente der Spieltheorie für die Existenz von Gleichgewichten, nämlich insbesondere den Fixpunktsatz von Kakutani. Der Beweis hier ist ausführlicher als der in [MW93].

Beweis von Theorem 5.3: Zuerst wird der Fixpunktsatz von Kakutani (1941) zitiert:

Sei $L \subset \mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) nicht leer, kompakt und konvex. Sei $g : L \to \mathcal{P}(L)$ eine Abbildung (also ist g eine Korrespondenz*), die als Korrespondenz abgeschlossen ist und so dass für jedes $x \in K$ die Menge $g(x) \subset L$ nicht leer, kompakt und konvex ist. Dann hat g (mindestens) einen Fixpunkt, das ist ein Punkt $x \in L$ mit $x \in g(x)$.*

(Die Bedingung *abgeschlossen* wird gleich klar werden.) Um ihn anwenden zu können, müssen die folgenden beiden Behauptungen gezeigt werden.

Behauptung 1: *Sei $Q^\varepsilon(\mu)$ wie in Definition 5.2 (d). Diese Menge ist nicht leer, kompakt und konvex, und die Korrespondenz $\{\mu \,|\, ...\} \to \mathcal{P}(\{p \,|\, ...\})$, $\mu \mapsto Q^\varepsilon(\mu)$, ist abgeschlossen.*

Behauptung 2: *Sei $R(p)$ wie in Definition 5.2 (c). Diese Menge ist nicht leer, kompakt und konvex, und die Korrespondenz $\{p \,|\, ...\} \to \mathcal{P}(\{\mu \,|\, ...\})$, $p \mapsto R(p)$, ist abgeschlossen.*

Beweis von Behauptung 1:
$Q^\varepsilon(\mu)$ **nicht leer:** Definiere für $(i,j) \in H$

$$\begin{aligned} n(i,j) &:= |\{a \in K \,|\, S_a(\mu) \geq S_i(\mu)\}| \cdot |\{b \in K \,|\, S_b(\mu) \geq S_j(\mu)\}| \in \mathbb{N}, \\ \widetilde{p}_{ij} &:= \frac{\varepsilon^{n(i,j)}}{k^2}, \\ p_{ij} &:= \frac{\widetilde{p}_{ij}}{\sum_{(a,b)\in H} \widetilde{p}_{ab}}. \end{aligned}$$

Dann ist $p = (p_{ij})_{(i,j)\in H} \in Q^\varepsilon(\mu)$.
$Q^\varepsilon(\mu)$ **kompakt:** Alle p_{ij} sind im Intervall $[\frac{\varepsilon^{k^2}}{k^2}, 1]$, und die Ungleichungen zwischen p_{ih} und p_{jh} in der Definition von $Q^\varepsilon(\mu)$ sind nicht strikt.
$Q^\varepsilon(\mu)$ **konvex:** Seien $p, q \in Q^\varepsilon(\mu)$, und sei $\lambda \in (0,1)$. Für i und j mit $S_i(\mu) < S_j(\mu)$ ist

$$p_{ih} \leq \varepsilon p_{jh} \text{ und } q_{ih} \leq \varepsilon q_{jh} \text{ für } h \in K - \{i,j\}.$$

Daher ist auch

$$\lambda p_{ih} + (1-\lambda) q_{ih} \leq \varepsilon(\lambda p_{jh} + (1-\lambda) q_{jh}).$$

Also ist $\lambda p + (1-\lambda) q \in Q^\varepsilon(\mu)$.
Die Korrespondenz $\{\mu \,|\, ...\} \to \mathcal{P}(\{p \,|\, ...\})$, $\mu \mapsto Q^\varepsilon(\mu)$, ist abgeschlossen: Seien $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, und μ_∞ Wahlergebnisse mit $\mu_n \to_{n\to\infty} \mu_\infty$, und seien $p_n, n \in \mathbb{N}$, und p_∞ Umfragewerte mit $p_n \to_{n\to\infty} p_\infty$ und $p_n \in Q^\varepsilon(\mu_n)$. Dann ist $p_\infty \in Q^\varepsilon(\mu_\infty)$ zu zeigen.

Seien $i, j \in K$ mit $S_i(\mu_\infty) < S_j(\mu_\infty)$. Dann gilt für große n auch $S_i(\mu_n) < S_j(\mu_n)$. Wegen $p_n \in Q^\varepsilon(\mu_n)$ ist $(p_n)_{ih} \leq \varepsilon \cdot (p_n)_{jh}$ für $h \in K - \{i, j\}$. Daher gilt auch $(p_\infty)_{ih} \leq \varepsilon \cdot (p_\infty)_{jh}$ für $h \in K - \{i, j\}$. Daher ist $p_\infty \in Q^\varepsilon(\mu_\infty)$. ($\square$)

Beweis von Behauptung 2: $R(p)$ **nicht leer, kompakt und konvex:** Für festes $u \in T$ ist die endliche Menge $V(p, u) := \{v \in V \,|\, G(p, v, u) = \max_{w \in V} G(p, w, u)\}$ natürlich nicht leer. Es ist

$$\begin{aligned} R(p) &= \{\mu \text{ Wahlergebnis} \,|\, \forall\, u \in T\ \{v \,|\, \mu(v, u) > 0\} \subset V(p, u)\} \\ &\cong \prod_{u \in T} \left(\text{Wahrscheinlichkeitsverteilung } \frac{\mu(., u)}{f(u)} \text{ auf } V(p, u)\} \right) \end{aligned}$$

isomorph zu einem Produkt von Simplices. Daher ist $R(p)$ nicht leer, kompakt und konvex.

Die Korrespondenz $\{p \,|\, ...\} \to \mathcal{P}(\{\mu \,|\, ...\}),\ p \mapsto R(p)$**, ist abgeschlossen:** Seien $p_n, n \in \mathbb{N}$, und p_∞ Umfragewerte mit $p_n \to_{n \to \infty} p_\infty$, und seien $\mu_n, n \in \mathbb{N}$, und μ_∞ Wahlergebnisse mit $\mu_n \to_{n \to \infty} \mu_\infty$ und $\mu_n \in R(p_n)$. Dann ist $\mu_\infty \in R(p_\infty)$ zu zeigen.

Für großes n ist $V(p_n, u) \subset V(p_\infty, u)$. Weiter ist für großes n $\{v \in V \mid \mu_n(v, u) > 0\} \supset \{v \in V \,|\, \mu_\infty(v, u) > 0\}$. Daher ist $\{v \in V \,|\, \mu_\infty(v, u) > 0\} \subset V(p_\infty, u)$. Daher ist $\mu_\infty \in R(p_\infty)$. ($\square$)

Sei nun für einen Moment $\varepsilon \in (0, 1]$ fest. Die Produktmenge $\{\mu \text{ Wahlergebnis}\} \times \{p \text{ Umfragewert}\}$ ist natürlich nicht leer, kompakt und konvex. Wegen der Behauptungen 1 und 2 ist die Korrespondenz

$$\begin{aligned} & \{\mu \text{ Wahlergebnis}\} \times \{p \text{ Umfragewert}\} \\ \to\ & \mathcal{P}(\{\mu \text{ Wahlergebnis}\} \times \{p \text{ Umfragewert}\}) \\ (\mu, p) \mapsto\ & R(p) \times Q^\varepsilon(\mu) \end{aligned}$$

abgeschlossen, und das Bild $R(p) \times Q^\varepsilon(\mu)$ eines Paars (μ, p) ist nicht leer, kompakt und konvex. Daher ist Kakutani's Fixpunktsatz anwendbar. Er liefert ein Paar $(\mu^\varepsilon, p^\varepsilon) \in R(p^\varepsilon) \times Q^\varepsilon(\mu^\varepsilon)$.

Nun wählt man irgendeine Folge $(\varepsilon_m)_{m \in \mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_m \to_{m \to \infty} 0$ und betrachtet die Folge $((\mu^{\varepsilon_m}, p^{\varepsilon_m}))_{m \in \mathbb{N}}$. Weil die Mengen $V \times T$ und H endlich sind, gibt es eine Unterfolge $(\varepsilon_{m(n)})_{n \in \mathbb{N}}$, so dass die Mengen

$$\begin{aligned} & V(p^{\varepsilon_{m(n)}}, n) \quad \text{für jedes } u \in T \qquad (1*) \\ \text{und} \quad & \{(i, j) \in H \,|\, S_i(\mu^{\varepsilon_{m(n)}}) < S_j(\mu^{\varepsilon_{m(n)}})\} \qquad (2*) \end{aligned}$$

konstant sind (d.h. jeweils gleich für alle $n \in \mathbb{N}$). Definiere $\mu := \mu^{\varepsilon_{m(n_0)}}$ für irgendein $n_0 \in \mathbb{N}$. Dieses μ ist ein Wahlgleichgewicht, denn die Folge $(\varepsilon_{m(n)}, p^{\varepsilon_{m(n)}})_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllt $\varepsilon_{m(n)} \to_{n \to \infty} 0$ und

$$\begin{aligned} \mu \in R(p^{\varepsilon_{m(n_0)}}) &\overset{(1*)}{=} R(p^{\varepsilon_{m(n)}}), \\ p^{\varepsilon_{m(n)}} \in Q^{\varepsilon_{m(n)}}(\mu^{\varepsilon_{m(n)}}) &\overset{(2*)}{=} Q^{\varepsilon_{m(n)}}(\mu). \qquad \square \end{aligned}$$

Korollar 5.4 *Sei (K, T, f, V) ein Wahlsystem und μ ein Wahlgleichgewicht. Definiere analog zu den $Q^\varepsilon(\mu)$ die Menge*

$$\begin{aligned} Q^0(\mu) &:= \{q \text{ Umfragewert} \,|\, \forall\, i, j, h \in K \text{ mit } i \neq j \neq h \neq i \\ &\qquad\qquad \Big(S_i(\mu) < S_j(\mu) \Rightarrow q_{ih} = 0\Big)\} \\ &= \{q \text{ Umfragewert} \,|\, q_{ij} \neq 0 \Rightarrow \Big(S_i(\mu) = S_j(\mu) \text{ maximal} \\ &\qquad \text{oder } S_i(\mu) \text{ allein maximal und } S_j(\mu) \text{ an 2. Stelle} \\ &\qquad \text{oder } S_j(\mu) \text{ allein maximal und } S_i(\mu) \text{ an 2. Stelle}\Big)\}. \end{aligned}$$

Dann ist die Schnittmenge $Q^0(\mu) \cap \{q \text{ Umfragewert} \,|\, \mu \in R(q)\}$ nicht leer. Notation: Ein solches q unterstützt *μ.*

Also hat jedes Wahlgleichgewicht ein unterstützendes q. Oft ist es eindeutig. Es ist immer eine Hilfe beim Verstehen des Wahlgleichgewichts.

Beweis des Korollars 5.4: Sei $(\varepsilon_m, p_m)_{m\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Paaren wie in der Definition 5.2 (e) eines Wahlgleichgewichts. Es gibt eine Unterfolge $(\varepsilon_{m(n))})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $p_{m(n)} \to_{n\to\infty} q$ und q ein Umfragewert, denn die Menge der Umfragewerte ist kompakt. Wegen der Stetigkeit von $G(., v, u)$ in p ist $\mu \in R(q)$. Wegen $p_{m(n)} \in Q^{\varepsilon_{m(n)}}(\mu)$ ist $q \in Q^0(\mu)$. □

Der Beweis von Theorem 5.3 ist eine schöne Anwendung des Fixpunktsatzes von Kakutani. Aber für Myerson und Weber war er billig. Er ist nicht das Hauptergebnis von [MW93]. Das Hauptergebnis ist ein Beispiel, wo die Wahlgleichgewichte für alle drei Wahlsysteme in Definition 5.1 (c) diskutiert werden. Anstelle von Beweisen bietet [MW93] aber nur ein paar beispielhafte Argumente an. Das folgende Beispiel 5.5 beschreibt die Situation, das Lemma 5.6 gibt die Resultate zu den Wahlgleichgewichten, die Beweisskizze danach gibt wesentlich mehr Argumente als in [MW93], aber auch nicht alle. Die Darstellung hier ist formaler und detaillierter als [MW93]. Das ist angemessen für eine Vorlesung. Aber für eine Veröffentlichung ist die informelle knappe Darstellung in [MW93], wo fast alle technischen Argumente weggelassen sind, sicher besser.

Beispiel 5.5 $k = 3$, $K = \{\text{K1,K2,K3}\}$, $T = \{u^A, u^B, u^C\}$, mit

Wählertyp	Nutzenvektor	Anteil an der Wählerschaft
A	$u^A = (10, 9, 0)$	$f(u^A) = 0,3$
B	$u^B = (9, 10, 0)$	$f(u^B) = 0,3$
C	$u^C = (0, 0, 10)$	$f(u^C) = 0,4.$

In [MW93] werden die Kandidaten K1 und K2 als *links* bezeichnet, und Kandidat K3 wird als rechts bezeichnet. Die linken Wähler machen 60%

aller Wähler aus, aber je die Hälfte von ihnen zieht K1 bzw. K2 vor. Da besteht die Gefahr, dass bei Wahlen K1 und K2 konkurrieren und am Ende K3 gewinnt.
Die allgemeinen Formeln aus Definition 5.1 und 5.2 werden hier

$$\begin{aligned} S_i(\mu) &= \sum_{(v,u)\in V\times T} v_i \times \mu(v,u), \\ G(p,v,u) &= \sum_{i=1}^{3} v_i \cdot r_i(p,u) \text{ mit } r_i(p,u) = \sum_{j\neq i} p_{ij}\cdot(u_i-u_j). \end{aligned}$$

Die folgende Tabelle der Werte $r_i(p,u)$ wird im Beweis von Lemma 5.6 oft konsultiert werden.

i	1	2	3
$r_i(p,u^A)$	$p_{12}+10p_{13}$	$-p_{12}+9p_{23}$	$-10p_{13}-9p_{23}$
$r_i(p,u^B)$	$-p_{12}+9p_{13}$	$p_{12}+10p_{23}$	$-9p_{13}-10p_{23}$
$r_i(p,u^C)$	$-10p_{13}$	$-10p_{23}$	$10p_{13}+10p_{23}$

Das folgende Lemma gibt bei allen drei Wahlsystemen die Wahlgleichgewichte.

Lemma 5.6 *Betrachte die Situation im Beispiel 5.5, wo V die Menge zur Mehrheitswahl oder Zustimmungswahl oder Ranking-Wahl ist.*

(a) **Mehrheitswahl:** *Es gibt genau drei Wahlgleichgewichte $\mu^{(1)},\mu^{(2)},\mu^{(3)}$.*
$\mu^{(1)}$: Alle linken Wähler wählen K1, alle rechten Wähler wählen K3. In Formeln:

$$\mu^{(1)}((1,0,0),u^A)=0,3,\quad \mu^{(1)}((1,0,0),u^B)=0,3,\quad \mu^{(1)}((0,0,1),u^C)=0,4,$$
$$(S_1(\mu^{(1)});S_2(\mu^{(1)});S_3(\mu^{(1)}))=(0,6;\ 0;\ 0,4),\qquad \text{K1 vor K3 vor K2.}$$

$\mu^{(1)}$ wird nur von $q=(q_{12},q_{13},q_{23})=(0,1,0)$ unterstützt.

$\mu^{(2)}$: Alle linken Wähler wählen K2, alle rechten Wähler wählen K1.

$$(S_1(\mu^{(1)});S_2(\mu^{(1)});S_3(\mu^{(1)}))=(0;\ 0,6;\ 0,4),\qquad \text{K2 vor K3 vor K1.}$$

$\mu^{(2)}$ wird nur von $q=(q_{12},q_{13},q_{23})=(0,0,1)$ unterstützt.

$\mu^{(3)}$: Jeder der linken Wähler wählt den bevorzugten Kandidaten, die rechten Wähler wählen den rechten Kandidaten. In Formeln:

$$\mu^{(3)}((1,0,0),u^A)=0,3,\quad \mu^{(3)}((0,1,0),u^B)=0,3,\quad \mu^{(3)}((0,0,1),u^C)=0,4,$$
$$(S_1(\mu^{(1)});S_2(\mu^{(1)});S_3(\mu^{(1)}))=(0,3;\ 0,3;\ 0,4),\qquad \text{K3 vor K1 und K2.}$$

$\mu^{(3)}$ wird nur von jedem $q=(q_{12},q_{13},q_{23})=(0,q_{13},1-q_{13})$ mit $q_{13}\in[\frac{9}{19},\frac{10}{19}]$ unterstützt.

(b) **Zustimmungswahl:** *Es gibt genau drei Wahlgleichgewichte* $\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \mu^{(3)}$.

$\mu^{(1)}$*: Die linken Wähler, die K1 vorziehen, wählen nur K1, die linken Wähler, die K2 vorziehen, wählen K1 und K2, alle rechten Wähler wählen K3. In Formeln:*

$$\mu^{(1)}((1,0,0),u^A) = 0,3, \quad \mu^{(1)}((1,1,0),u^B) = 0,3, \quad \mu^{(1)}((0,0,1),u^C) = 0,4,$$
$$(S_1(\mu^{(1)}); S_2(\mu^{(1)}); S_3(\mu^{(1)})) = (0,6;\ 0,3;\ 0,4), \qquad \text{K1 vor K3 vor K2.}$$

$\mu^{(1)}$ *wird nur von* $q = (q_{12}, q_{13}, q_{23}) = (0,1,0)$ *unterstützt.*

$\mu^{(2)}$*: Die linken Wähler, die K2 vorziehen, wählen nur K2, die linken Wähler, die K1 vorziehen, wählen K1 und K2, alle rechten Wähler wählen K1.*

$$(S_1(\mu^{(1)}); S_2(\mu^{(1)}); S_3(\mu^{(1)})) = (0,3;\ 0,6;\ 0,4), \qquad \text{K2 vor K3 vor K1.}$$

$\mu^{(2)}$ *wird nur von* $q = (q_{12}, q_{13}, q_{23}) = (0,0,1)$ *unterstützt.*

$\mu^{(3)}$*: 2/3 der linken Wähler, die K1 vorziehen, wählt nur K1, 1/3 der linken Wähler, die K1 vorziehen, wählt K1 und K2, 2/3 der linken Wähler, die K2 vorziehen, wählt nur K2, 1/3 der linken Wähler, die K2 vorziehen, wählt K1 und K2, die rechten Wähler wählen K3. In Formeln:*

$$\begin{aligned} \mu^{(3)}((1,0,0),u^A) = 0,2, \quad \mu^{(3)}((1,1,0),u^A) &= 0,1,\\ \mu^{(3)}((0,1,0),u^B) = 0,2, \quad \mu^{(3)}((1,1,0),u^B) &= 0,1,\\ \mu^{(3)}((0,0,1),u^C) &= 0,4,\\ (S_1(\mu^{(1)}); S_2(\mu^{(1)}); S_3(\mu^{(1)})) &= (0,4;\ 0,4;\ 0,4),\\ &\text{K1 und K2 und K3 gleichauf.} \end{aligned}$$

$\mu^{(3)}$ *wird nur von* $q = (q_{12}, q_{13}, q_{23}) = (\frac{9}{11}, \frac{1}{11}, \frac{1}{11})$ *unterstützt.*

(c) **Ranking-Wahl:** *Es gibt genau eine Familie von Wahlgleichgewichten* $\mu^{(\alpha)}$ *mit einem Parameter* $\alpha \in [-0,1;\ 0,1]$. *Die Anteile* $\mu^{(\alpha)}(v,u)$ *sind wie folgt.*

$$\begin{aligned} &\mu^{(\alpha)}((2,1,0),u^A) = 0,2+\alpha, \qquad \mu^{(\alpha)}((2,0,1),u^A) = 0,1-\alpha,\\ &\mu^{(\alpha)}((1,2,0),u^B) = 0,2-\alpha, \qquad \mu^{(\alpha)}((0,2,1),u^B) = 0,1+\alpha,\\ &\mu^{(\alpha)}((0,1,2),u^C) = 0,2-\alpha, \qquad \mu^{(\alpha)}((1,0,2),u^C) = 0,2+\alpha,\\ &(S_1(\mu^{(1)}); S_2(\mu^{(1)}); S_3(\mu^{(1)})) \ = \ (1;\ 1;\ 1), \quad \text{K1 und K2 und K3 gleichauf.} \end{aligned}$$

$\mu^{(3)}$ *wird nur von* $q = (q_{12}, q_{13}, q_{23}) = (\frac{28}{30}, \frac{1}{30}, \frac{1}{30})$ *unterstützt.*

Teile der Argumente des Beweises kommen am Ende dieses Kapitels. Vorher kommen einige Bemerkungen.

Bemerkungen 5.7 (i) Die Wahlgleichgewichte sind alle instruktiv und verständlich. Bei der Mehrheitswahl bündeln die linken Wähler in den ersten beiden Gleichgewichten alle Stimmen auf einen Kandidaten, und dieser Kandidat gewinnt. Beim dritten Gleichgewicht blockieren sich die linken Kandidaten, und der rechte Kandidat gewinnt.
Die ersten beiden Wahlgleichgewichte bei der Zustimmungswahl ähneln den ersten beiden Gleichgewichten bei der Mehrheitswahl. Einer der linken Kandidaten bekommt von allen linken Wählern Stimmen und gewinnt. Der andere linke Kandidat bekommt nur von den linken Wählern Stimmen, die ihn favorisieren. Beim dritten Wahlgleichgewicht bekommen alle drei Kandidaten gleich viele Stimmen.
Bei der Ranking-Wahl gibt jedes Wahlgleichgewicht in der 1-Parameter-Familie allen drei Kandidaten gleich viele Stimmen. Das ist unbefriedigend.

(ii) In [MW93] wird nach dem Beispiel oben ein zweites Beispiel untersucht, bei dem auch $k = 3$, $K = \{K1, K2, K3\}$ ist . Die Nutzenvektoren sind gleich wie im Beispiel oben. Allerdings ist nun der Anteil der rechten Wähler sehr klein:

Wählertyp	Nutzenvektor	Anteil an der Wählerschaft
A	$u^A = (10, 9, 0)$	$f(u^A) = 0,49$
B	$u^B = (9, 10, 0)$	$f(u^B) = 0,49$
C	$u^C = (0, 0, 10)$	$f(u^C) = 0,02.$

Bei der Ranking-Wahl gibt es auch nun eine 1-Parameter-Familie von Gleichgewichten, und bei allen von ihnen erhalten alle drei Kandidaten gleich viele Stimmen. Angesichts des kleinen Anteils rechter Wähler heißt das, dass sich die linken Wähler sehr effizient gegenseitig blockieren. Das ist fatal.
Bei der Zustimmungswahl gibt es nun ein neuartiges Wahlgleichgewicht, bei dem jeder Wähler nur für seinen Lieblingskandidaten stimmt. Dann stehen K1 und K2 gleichauf und vor K3. Es wird durch $q = (1, 0, 0)$ unterstützt. Wenn ich [MW93] richtig verstehe, ist dies nun das einzige Wahlgleichgewicht bei der Zustimmungswahl.
Bei der Mehrheitswahl ist (wenn ich [MW93] richtig verstehe) dieses μ auch ein Wahlgleichgewicht, und es gibt noch (mindestens) zwei weitere. Bei einem von ihnen wählen alle linken Wähler K1, beim anderen wählen alle linken Wähler K2. Sie ähneln $\mu^{(1)}$ und $\mu^{(2)}$ in Lemma 5.5 (a). In [MW93] wird nicht klar gesagt, ob das alle Wahlgleichgewichte beim Mehrheitswahlrecht sind. Ich habe es nicht geprüft.

(iii) Ein *Duverger's Law* postuliert, dass beim Mehrheitswahlrecht nur zwei Kandidaten Stimmen bekommen können. Das Wahlgleichgewicht $\mu^{(3)}$ in Lemma 5.5 (a) widerspricht dem. In [MW93, Seite 106] wird vermutet, dass in den bekannten Diskussionen zu Duverger's Law implizit zusätzliche Annahmen gemacht werden.

(iv) In [MW93] wird nach dem zweiten Beispiel das Grundmodell noch ausgebaut. Die Politiker haben die Wahl, sich in der Wählergunst verschieden zu positionieren, d.h. nun sind die Nutzenvektoren Abbildungen von einem Raum von möglichen Positionen der Politiker nach $\mathbb{R}$. Der Raum wird als das Intervall $[0, 100]$ gewählt. Ein Theorem sagt, dass dann bei der Mehrheitswahl für jedes $z \in (0, 100)$ ein Gleichgewicht existiert, bei dem genau ein Kandidat die Position z einnimmt und der einzige Gewinner ist. Ein anderes Theorem sagt, dass bei der Zustimmungswahl bei jedem Gleichgewicht alle Gewinner die Position $z = 50$ einnehmen. Da ist also viel weniger Willkür. Die Ranking-Wahl wird nicht diskutiert.

(v) Im letzten Abschnitt in [MW93] wird die Existenz von vielen Wahlgleichgewichten beim Mehrheitswahlrecht postuliert und kritisch diskutiert. Sie bedeutet, dass Umfragewerte einen großen Einfluß auf das am Ende erreichte Wahlgleichgewicht haben können. Das ist schlecht, denn es erlaubt Medien, durch eine tendenziöse Berichterstattung mit geratenen Umfragewerten eine Wahl zu beeinflussen. Bei vielen Wahlgleichgewichten kann die Wählerschaft zugunsten eines speziellen Wahlgleichgewichts beeinflußt werden. [MW93] schließt mit dem Vorschlag, nicht die Mehrheitswahl, sondern die Zustimmungswahl oder vielleicht auch die Ranking-Wahl zu benutzen. Die Ergebnisse von Lemma 5.5 sprechen aus meiner Sicht dann mehr für die Zustimmungswahl als die Ranking-Wahl.

Teile der Argumente des Beweises von Lemma 5.6: Sei p ein Umfragewert mit $p_{ij} > 0$ für alle $(i, j) \in H$. Dann ist

$$\begin{aligned}
&r_1(p, u^A) > 0 > r_3(p, u^A),\\
&r_2(p, u^B) > 0 > r_3(p, u^B),\\
&r_1(p, u^C) < 0, r_2(p, u^C) < 0, r_3(p, u^C) > 0.
\end{aligned}$$

Bei jedem der drei Wahlsysteme kann man daraus Folgerungen über $\mu \in R(p)$ und $S_j(\mu)$ für $\mu \in R(p)$ ziehen.

Mehrheitswahl:

$$\begin{array}{rcll}
\mu((1,0,0), u^A) + \mu((0,1,0), u^A) & = & 0,3, & \\
\mu((1,0,0), u^A) & = & 0,3, & \text{falls } r_1(p, u^A) > r_2(p, u^A),\\
\mu((0,1,0), u^A) & = & 0,3, & \text{falls } r_1(p, u^A) < r_2(p, u^A),\\
\mu((1,0,0), u^B) + \mu((0,1,0), u^B) & = & 0,3, & \\
\mu((1,0,0), u^B) & = & 0,3, & \text{falls } r_1(p, u^B) > r_2(p, u^B),\\
\mu((0,1,0), u^B) & = & 0,3, & \text{falls } r_1(p, u^B) < r_2(p, u^B),\\
\mu((0,0,1), u^C) & = & 0,4, &
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
S_1(\mu) &= \mu((1,0,0),u^A) + \mu((1,0,0),u^B),\\
S_2(\mu) &= \mu((0,1,0),u^A) + \mu((0,1,0),u^B),\\
S_3(\mu) &= 0,4,\\
S_1(\mu) + S_2(\mu) &= 0,6.
\end{aligned}$$

Zustimmungswahl:

$$\begin{aligned}
\mu((1,0,0),u^A) + \mu((1,1,0),u^A) &= 0,3, &&\\
\mu((1,0,0),u^A) &= 0,3, && \text{falls } r_2(p,u^A) < 0,\\
\mu((1,1,0),u^A) &= 0,3, && \text{falls } r_2(p,u^A) > 0,\\
\mu((0,1,0),u^B) + \mu((1,1,0),u^B) &= 0,3, &&\\
\mu((0,1,0),u^B) &= 0,3, && \text{falls } r_1(p,u^B) < 0,\\
\mu((1,1,0),u^B) &= 0,3, && \text{falls } r_1(p,u^B) > 0,\\
\mu((0,0,1),u^C) &= 0,4, &&
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 0,3 + \mu((1,1,0),u^B),\\
S_2(\mu) &= 0,3 + \mu((1,1,0),u^A),\\
S_3(\mu) &= 0,4.
\end{aligned}$$

Ranking-Wahl:

$$\begin{aligned}
\mu((2,1,0),u^A) + \mu((1,2,0),u^A) + \mu(2,0,1),u^A) &= 0,3,\\
\mu((2,1,0),u^B) + \mu((1,2,0),u^B) + \mu(0,2,1),u^B) &= 0,3,\\
\mu((1,0,2),u^C) + \mu(0,1,2),u^C) &= 0,4,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
S_1(\mu) &= 0,6 - \mu((1,2,0),u^A) + 2\mu((2,1,0),u^B)\\
&\quad + \mu((1,2,0),u^B) + \mu((1,0,2),u^C),\\
S_2(\mu) &= 0,6 - \mu((2,1,0),u^B) + \mu((2,1,0),u^A)\\
&\quad + 2\mu((1,2,0),u^A) + \mu((0,1,2),u^C),\\
S_3(\mu) &= 0,8 + \mu((2,0,1),u^A) + \mu((0,2,1),u^B),\\
3 &= S_1(\mu) + S_2(\mu) + S_3(\mu).
\end{aligned}$$

Jedes Wahlgleichgewicht μ erfüllt die Bedingungen oben.

(a) Vollständiger Beweis im Fall der Mehrheitswahl: Wegen $S_1(\mu) + S_2(\mu) = 0,6$ und $S_3(\mu) = 0,4$ ist man bei jedem Wahlgleichgewicht μ in einem der folgenden drei Fälle.

1. Fall $\min(S_1(\mu), S_3(\mu)) > S_2(\mu)$: Dann wird μ nur von $q = (0,1,0)$ unterstützt, und es ist

$$\begin{aligned} G(q,v,u^A) &= 10(v_1 - v_3), \quad \text{maximal nur bei } v = (1,0,0), \\ G(q,v,u^B) &= 9(v_1 - v_3), \quad \text{maximal nur bei } v = (1,0,0), \\ G(q,v,u^C) &= -10(v_1 - v_3), \quad \text{maximal nur bei } v = (0,0,1). \end{aligned}$$

Also ist $\mu = \mu^{(1)}$, $(S_1(\mu), S_2(\mu), S_3(\mu) = (0,6;\ 0;\ 0,4)$, und K1 vor K3 vor K2.
Es bleibt zu zeigen, dass $\mu^{(1)}$ ein Wahlgleichgewicht ist. Dazu wählt man irgendeine Folge $((\varepsilon_n, p_n))_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\varepsilon_n \in (0,1]$, $\varepsilon_n \to_{n\to\infty} 0$, $p_n \in Q^{\varepsilon_n}(\mu)$ ein Umfragewert und $p_n \to_{n\to\infty} q$. Das geht. Nun gilt $R(q) = \{\mu^{(1)}\}$ und daher auch $R(p_n) = \{\mu^{(1)}\}$, also $\mu^{(1)} \in R(p_n)$. Alle Eigenschaften in Definition 5.2 (e) sind erfüllt.

2. Fall $\min(S_2(\mu), S_3(\mu)) > S_1(\mu)$: Analog zum ersten Fall erhält man $\mu = \mu^{(2)}$ und $q = (0,0,1)$ und K2 vor K3 vor K1. Und analog zum 1. Fall zeigt man, dass $\mu^{(2)}$ ein Wahlgleichgewicht ist.

3. Fall $S_3(\mu) > S_1(\mu) = S_2(\mu) = 0,3$: Dann wird μ a priori nur von $q = (0, q_{13}, 1 - q_{13})$ mit $q_{13} \in [0,1]$ unterstützt. Es muss mindestens eine der beiden Ungleichungen $r_1(q,u^A) > r_2(q,u^A)$ und $r_1(q,u^B) < r_2(q,u^B)$ gelten, denn sie sagen

$$10q_{13} > 9(1 - q_{13}) \quad \text{und} \quad 9q_{13} < 10(1 - q_{13}).$$

Also ist $\mu((0,1,0),u^A) = 0$ oder $\mu((1,0,0),u^B) = 0$. Mit $S_1(\mu) = S_2(\mu) = 0,3$ folgt $\mu((0,1,0),u^B) = 0,3$ bzw. $\mu((1,0,0),u^A) = 0,3$. Also ist $\mu = \mu^{(3)}$.
Nun muss $r_1(q,u^A) \geq r_2(q,u^A)$ und $r_1(q,u^B) \leq r_2(q,u^B)$ sein. Das gibt beim unterstützenden Wert $q = (0, q_{13}, 1 - q_{13})$ die Beschränkungen $q \in [\frac{9}{19}, \frac{10}{19}]$.
Analog zum 1. Fall zeigt man, dass $\mu^{(3)}$ ein Wahlgleichgewicht ist.

(b) Vollständiger Beweis: schwere Übung.

(c) Vollständiger Beweis: schwere Übung. □

Literatur

[MW93] R.B. Myerson, R.J. Weber: A theory of voting equilibria. American Political Science Review **87** (1993), 102–114.