Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling

Blatt 2
06.03.2018

Übungsaufgaben zur Spieltheorie 2

1. *(3 Punkte)* Sei $n \in \{4,5,6,7,8,9\}$. Bestimmen Sie für jeden dieser Werte von n die eindeutige Zahl $R \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=R}^{n-1} \frac{1}{j} < 1 \leq \sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

Bestimmen Sie auch den Nutzen

$$U_R = \frac{R-1}{n} \cdot \sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j}.$$

2. *(3 Punkte)* Sie sollen aus einer unbekannten Zahl N von Gütern, die nacheinander, aber zu unbekannten Zeiten und in unbekannter Reihenfolge bei Ihnen eintreffen, das beste auswählen. Sie müssen irgendwann das zuletzt eingetroffene wählen. Über die Zahl N wissen Sie nichts. Sie wissen, dass alle Ankunftszeiten als Zufallsvariablen mit gleicher Verteilungsfunktion mit Dichte f auf dem Zeitintervall $[0,9]$ modelliert sind, die Dichte ist

$$f : [0,9] \to [0,1], \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{für } x \in \bigcup_{i=0,2,4,6,8}[i,i+1) \cup \{9\} \\ 0 & \text{für } x \in \bigcup_{i=1,3,5,7}[i,i+1) \end{cases}$$

Welche Strategie wählen Sie? Skizzieren Sie auch die Graphen von f und F auf dem Zeitintervall $[0,9]$.

3. *(3 Punkte)* Aus der Variante von Bruss des Sekretärinnenproblems wird in folgender Weise ein 2-Personen-Nullsummen-Spiel gemacht. Der Einfachheit halber wird $[0,T] = [0,1]$ und $F|_{[0,1]} = \mathrm{id}$ gesetzt.

Spieler B wählt die Verteilung von N. Er darf sie beliebig wählen (obwohl das unrealistisch ist). Spieler A wählt eine Strategie, mit der er eine möglichst große Gewinnwahrscheinlichkeit hat. Das Spiel ist ein Nullsummenspiel, daher will Spieler B, dass Spieler A eine möglichst geringe Gewinnwahrscheinlichkeit hat. Beide sind risikoneutral.

3 Varianten des Spiels werden betrachtet.

(a) Spieler A wählt zuerst die Strategie und teilt sie Spieler B mit. Dann wählt Spieler B die Verteilung von N.

(b) Spieler B wählt zuerst die Verteilung von N und teilt sie Spieler A mit. Dann wählt Spieler A die Strategie.

(c) Spieler A und Spieler B wählen die Strategie und die Verteilung von N gleichzeitig und ohne Wissen des anderen.

Bitte wenden !!!

Welche Strategie würden Sie Spieler A empfehlen? Welche Verteilung von N würden Sie Spieler B tendenziell empfehlen? (Bei (a) und (c) gibt es bessere und bessere, aber keine beste.)

4. *(2+3 Punkte)*

   (a) Zeigen Sie für $a \in \mathbb{R}_{>1/2}$
   $$\frac{1}{a} < \int_{a-\frac{1}{2}}^{a+\frac{1}{2}} \frac{1}{x} dx < \frac{1}{a - \frac{1}{4a}}.$$
   Hinweis: Man muß wenig rechnen, aber die Konvexität des Graphen von $(x \mapsto \frac{1}{x})$ benutzen.

   (b) Nutzen Sie (a), um die beiden Summen in den Ungleichungen
   $$\sum_{j=R}^{n-1} \frac{1}{j} < 1 \leq \sum_{j=R-1}^{n-1} \frac{1}{j},$$
   die R in Theorem 2.4 (b) bestimmen, besser als im Beweis von Theorem 2.4 (a) abzuschätzen. Zeigen Sie, dass folgendes gilt.
   Falls man a priori $R > b$ für ein $b > 0$ weiß, ist
   $$R \in \left(\frac{n}{e} + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4b})(1 - \frac{1}{e}), \frac{n}{e} + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}) \right).$$

Bemerkungen: (i) Da man $R > \frac{n}{e}$ weiß, ist
$$R \in \left(\frac{n}{e} + (\frac{1}{2} - \frac{e}{4n})(1 - \frac{1}{e}), \frac{n}{e} + (\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}) \right).$$

(ii)
$$(\frac{3}{2} - \frac{1}{2e}) - (\frac{1}{2} - \frac{e}{4n})(1 - \frac{1}{e}) = 1 + \frac{e-1}{4n}.$$
Für großes n ist das nur knapp größer als 1. Daher wird dann häufig das Intervall in (i) als einzige ganze Zahl das richtige R enthalten. Bei den Zahlen $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ ist das so.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 2 in der Übung am 13.03.2018