Aufgabe 1 (3P) erhaltene Punkte:

(a) (2P) Geben Sie die Definition eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über einem Körper K an.

(b) (1P) Geben Sie ein Beispiel eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über einem Körper K an, bei dem es mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen gibt. Begründen Sie das Beispiel.

Aufgabe 2 (2P) erhaltene Punkte:

Ein *Polytop* ist ein Durchschnitt im $\mathbb{R}^3$ von endlich vielen Halbräumen, sofern dieser Durchschnitt beschränkt ist. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & e & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops,} \\ \text{für } s \in \mathbb{N}_{\geq 3} & e_s & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen } s \text{ Kanten ausgehen,} \\ & k & := & \text{die Anzahl der Kanten des Polytops,} \\ & f & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,} \\ \text{für } t \in \mathbb{N}_{\geq 3} & f_t & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die } t \text{ Ecken haben.} \end{array}$$

Die folgende Tabelle listet die fünf platonischen Körper auf. Bei ihnen gibt es jeweils nur ein s mit $e_s \neq 0$ und nur ein t mit $f_t \neq 0$. Füllen Sie die Tabelle aus.

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
					Tetraeder
					Würfel = Hexaeder
					Oktaeder
					Dodekaeder
					Ikosaeder

Aufgabe 3 (3P) erhaltene Punkte:

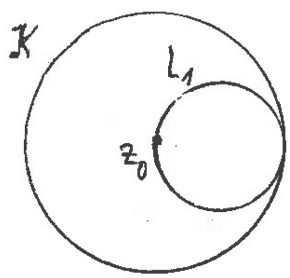
Es gibt fünf Klassen von Isometrien des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie in der folgenden Tabelle ihre Namen, ihre Fixpunktmengen und die Anzahl der Parameter an.

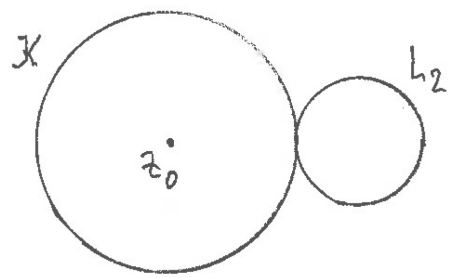
Name	Fixpunktmenge	Anzahl der Parameter

Aufgabe 4 (3P) erhaltene Punkte:

(a) (1P) Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Die Inversion $S_{\mathcal{K}} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bildet jeden Punkt $z \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ auf einen Punkt $z^* \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ ab. Geben Sie Bedingungen an, die z^* bestimmen (es gibt mehrere Möglichkeiten).

(b) (2P) Die folgenden beiden Skizzen zeigen jeweils $\mathcal{K}$ und einen zweiten verallgemeinerten Kreis L_1 bzw. L_2. Tragen Sie in der 1. Skizze den verallgemeinerten Kreis $S_{\mathcal{K}}(L_1)$ und in der 2. Skizze den verallgemeinerten Kreis $S_{\mathcal{K}}(L_2)$ ein.





(a)

Aufgabe 5 (3P) erhaltene Punkte:

Die Menge der Punkte der hyperbolischen Ebene im Scheibenmodell ist das Innere des Einheitskreises, $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.

(a) (1P) Geben Sie die Definition einer hyperbolischen Geraden im Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene an.

(b) (2P) Geben Sie die Definition des hyperbolischen Abstandes zweier Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$ mit $z_1 \neq z_2$ im Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene an.
Hinweis: Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ ist

$$(x_1 : x_2; x_3 : x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Aufgabe 6 (4P) erhaltene Punkte:

(a) (2P) Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2,\mathbb{R})$ induziert eine gebrochen lineare Abbildung

$$f_A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad z \mapsto \frac{az+b}{cz+d},$$

die $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}$ abbildet und die eine orientierungserhaltende Isometrie von $\mathbb{H}$ als hyperbolischer Ebene ist. Von diesen Abbildungen gibt es drei Typen. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

Name	Fixpunktmenge	char. Eigenschaft von A
hyperbolische Transformation	zwei Punkte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\lvert \mathrm{tr} A \rvert > 2$

(b) (1P) Geben Sie eine Matrix $A \in SL(2,\mathbb{R})$ mit $f_A = (z \mapsto z+1)$ an. Von welchem Typ ist f_A? Was sind die Fixpunkte von f_A?

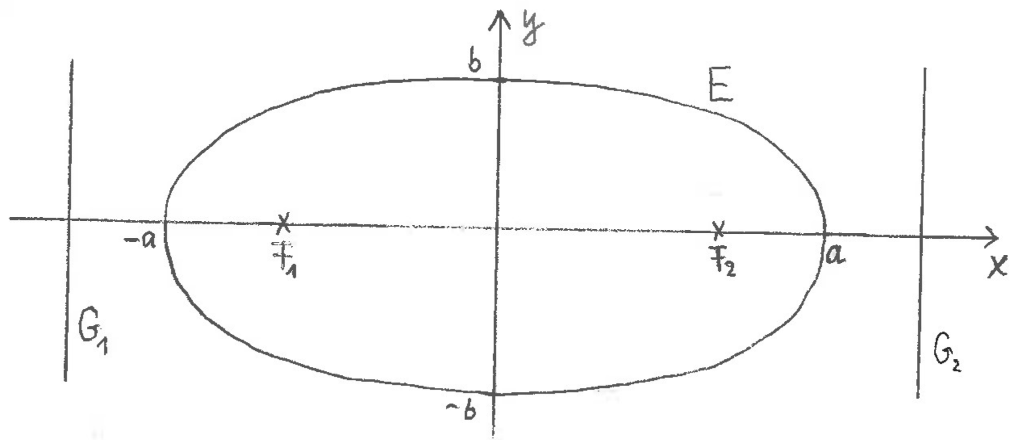
(c) (1P) Geben Sie eine Matrix $B \in SL(2,\mathbb{R})$ mit $f_B = (z \mapsto 1 - \frac{1}{z})$ an. Von welchem Typ ist f_B? Was sind die Fixpunkte von f_B?

Aufgabe 7 (3P) erhaltene Punkte:

Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a > b$. Die folgende Skizze zeigt die Ellipse

$$E := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

die Brennpunkte F_1 und F_2 und die Leitgeraden G_1 und G_2.



Die Exzentrizität der Ellipse ist $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in \mathbb{R}_{>0}$.
Formulieren Sie die drei (in der Vorlesung so genannten) *ästhetischen Eigenschaften.*

Aufgabe 8 (3P) erhaltene Punkte:

Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt: *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

Beweisen Sie diesen Satz und machen Sie eine Skizze zu Ihrem Beweis.