Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling 06.06.2018

1. Klausur zur Geometrie im FSS 2018, mit Lösungen

1. *(3 Punkte)*

   (a) (2P) Geben Sie die Definition eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über einem Körper K an.

   (b) (1P) Geben Sie ein Beispiel eines affinen Raums $\mathcal{A}$ über einem Körper K an, bei dem es mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen gibt. Begründen Sie das Beispiel.

Lösung:

(a) Ein affiner Raum ist ein Tripel $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_\mathcal{A})$. Hier ist $\mathcal{A}$ eine nichtleere Menge, $T(\mathcal{A})$ ist ein K-Vektorraum, und

$$\begin{array}{rcl} \varphi_\mathcal{A} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} & \to & T(\mathcal{A}) \\ (x, y) & \mapsto & \overrightarrow{xy} \end{array}$$

ist eine Abbildung mit den folgenden zwei Eigenschaften:

$$(i) \quad \forall\, x, y, z \in \mathcal{A} \quad \text{ist} \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

(ii) Für jeden Punkt $p \in \mathcal{A}$ ist die Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{A},p} =: \varphi_\mathcal{A}(p, .) : \mathcal{A} \to T(\mathcal{A}), \quad x \mapsto \overrightarrow{px},$$

bijektiv.

(b) $(\mathcal{A}, K) := (\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Hier besteht $\mathcal{A}$ selbst nur aus einer einzigen Geraden. Daher ist jede Bijektion $\mathcal{A} \to \mathcal{A}$ eine Kollineation, insbesondere auch jede nicht stetige Bijektion. Aber jede semiaffine bijektive Abbildung ist stetig. Daher gibt es mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen.

2. *(2 Punkte)* Ein *Polytop* ist ein Durchschnitt im $\mathbb{R}^3$ von endlich vielen Halbräumen, sofern dieser Durchschnitt beschränkt ist. Dann ist

$$\begin{array}{rrcl} & e & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops,} \\ \text{für } s \in \mathbb{N}_{\geq 3} & e_s & := & \text{die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen } s \text{ Kanten ausgehen,} \\ & k & := & \text{die Anzahl der Kanten des Polytops,} \\ & f & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,} \\ \text{für } t \in \mathbb{N}_{\geq 3} & f_t & := & \text{die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die } t \text{ Ecken haben.} \end{array}$$

Die folgende Tabelle listet die fünf platonischen Körper auf. Bei ihnen gibt es jeweils nur ein s mit $e_s \neq 0$ und nur ein t mit $f_t \neq 0$. Füllen Sie die Tabelle aus.

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
					Tetraeder
					Würfel = Hexaeder
					Oktaeder
					Dodekaeder
					Ikosaeder

Lösung:

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
3	3	4	6	4	Tetraeder
3	4	8	12	6	Würfel = Hexaeder
4	3	6	12	8	Oktaeder
3	5	20	30	12	Dodekaeder
5	3	12	30	20	Ikosaeder

3. *(3 Punkte)* Es gibt fünf Klassen von Isometrien des $\mathbb{R}^2$. Geben Sie in der folgenden Tabelle ihre Namen, ihre Fixpunktmengen und die Anzahl der Parameter an.

Name	Fixpunktmenge	Anzahl der Parameter

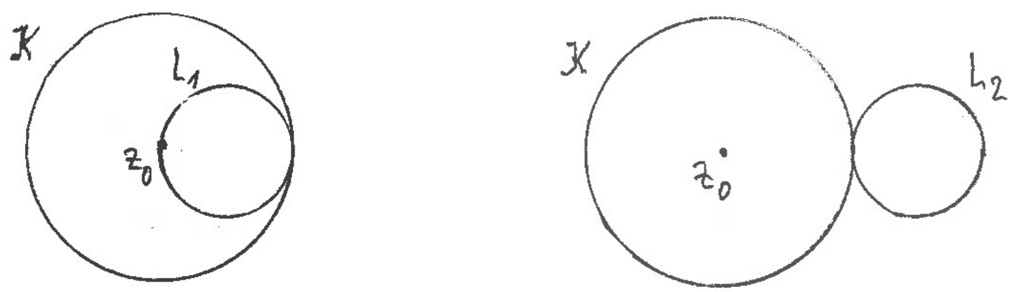
Lösung:

Name	Fixpunktmenge	Anzahl der Parameter
id	$\mathbb{R}^2$	0
Drehung	ein Punkt	3
Spiegelung	eine Gerade	2
Gleitspiegelung	$\emptyset$	3
Translation	$\emptyset$	2

4. *(3 Punkte)*

(a) (1P) Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt z_0 und Radius r. Die Inversion $S_{\mathcal{K}} : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bildet jeden Punkt $z \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ auf einen Punkt $z^* \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ ab. Geben Sie Bedingungen an, die z^* bestimmen (es gibt mehrere Möglichkeiten).

(b) (2P) Die folgenden beiden Skizzen zeigen jeweils $\mathcal{K}$ und einen zweiten verallgemeinerten Kreis L_1 bzw. L_2. Tragen Sie in der 1. Skizze den verallgemeinerten Kreis $S_{\mathcal{K}}(L_1)$ und in der 2. Skizze den verallgemeinerten Kreis $S_{\mathcal{K}}(L_2)$ ein.



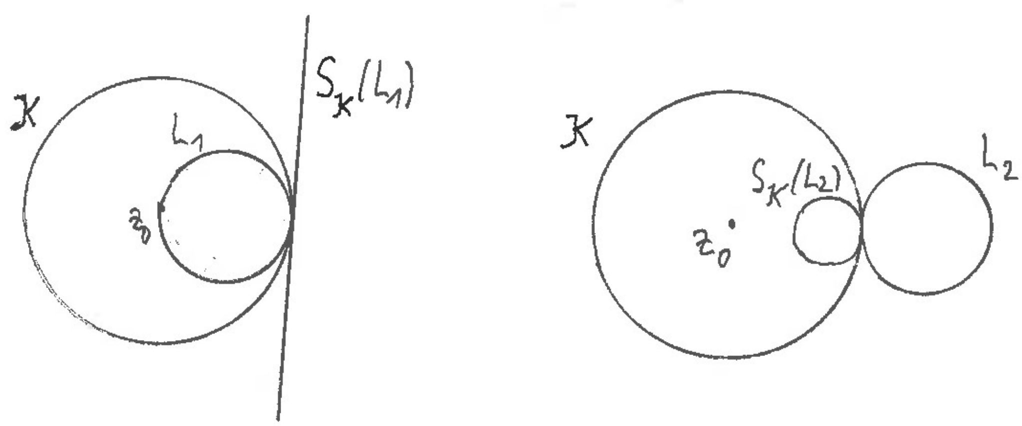
Lösung:

(a) 1. Lösung:

$$z^* = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}.$$

2. Lösung: z und z^* liegen auf der gleichen Halbgeraden mit Anfangspunkt z_0 und erfüllen $|z - z_0| \cdot |z^* - z_0| = r^2$.

(b) .



5. *(3 Punkte)* Die Menge der Punkte der hyperbolischen Ebene im Scheibenmodell ist das Innere des Einheitskreises, $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| < 1\}$.

(a) (1P) Geben Sie die Definition einer hyperbolischen Geraden im Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene an.

(b) (2P) Geben Sie die Definition des hyperbolischen Abstandes zweier Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{D}^2$ mit $z_1 \neq z_2$ im Scheibenmodell der hyperbolischen Ebene an.
Hinweis: Das Doppelverhältnis von vier verschiedenen Punkten $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{C}$ ist

$$(x_1 : x_2; x_3 : x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Lösung:

(a) Eine hyperbolische Gerade im Scheibenmodell $\mathbb{D}^2$ ist der in $\mathbb{D}^2$ liegende Teil eines zum Rand S^1 von $\mathbb{D}^2$ orthogonalen verallgemeinerten Kreises.

(b) Es seien α und β die Schnittpunkte von S^1 mit dem verallgemeinerten Kreis, dessen Schnitt mit $\mathbb{D}^2$ die hyperbolische Gerade durch z_1 und z_2 ist. α und β sind so benannt, dass die Punkte α, z_1, z_2 und β in dieser Reihenfolge auf dem verallgemeinerten Kreis liegen. Dann ist

$$d_{\mathbb{D}^2}(z_1, z_2) := \log((z_1 : z_2; \beta : \alpha)) = \log\left(\frac{\beta - z_1}{\beta - z_2} : \frac{\alpha - z_1}{\alpha - z_2}\right).$$

6. *(4 Punkte)*

(a) (2P) Eine Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{R})$ induziert eine gebrochen lineare Abbildung

$$f_A : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}, \quad z \mapsto \frac{az + b}{cz + d},$$

die $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ auf $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{H}$ abbildet und die eine orientierungserhaltende Isometrie von $\mathbb{H}$ als hyperbolischer Ebene ist. Von diesen Abbildungen gibt es drei Typen. Vervollständigen Sie die folgende Tabelle.

Name	Fixpunktmenge	char. Eigenschaft von A
hyperbolische Transformation	zwei Punkte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\lvert \mathrm{tr} A \rvert > 2$

(b) (1P) Geben Sie eine Matrix $A \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $f_A = (z \mapsto z + 1)$ an. Von welchem Typ ist f_A? Was sind die Fixpunkte von f_A?

(c) (1P) Geben Sie eine Matrix $B \in SL(2, \mathbb{R})$ mit $f_B = (z \mapsto 1 - \frac{1}{z})$ an. Von welchem Typ ist f_B? Was sind die Fixpunkte von f_B?

Lösung:

(a) .

Name	Fixpunktmenge	charakteristische Eigenschaft von A
hyperbolische Transformation	zwei Punkte in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\lvert \mathrm{tr} A\rvert > 2$
elliptische Transformation	ein Punkt $z \in \mathbb{H}$ und der Punkt $\overline{z}$	$\lvert \mathrm{tr} A\rvert < 2$
parabolische Transformation	ein Punkt in $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$	$\lvert \mathrm{tr} A\rvert = 2$

(b) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, f_A ist parabolisch, der Fixpunkt ist ∞.

(c) $B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, f_B ist elliptisch, der Fixpunkt in $\mathbb{H}$ ist $z = e^{2\pi i/6}$, (denn

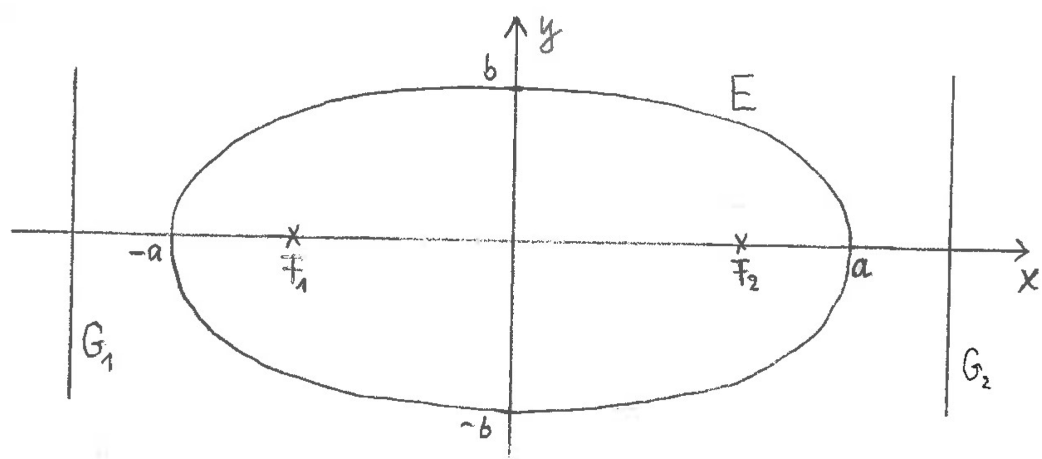
$$z = 1 - \frac{1}{z} \iff (z-1)z = -1 \iff z^2 - z + 1 = 0 \iff z = e^{\pm 2\pi i/6},)$$

der andere Fixpunkt ist $\overline{z} = e^{-2\pi i/6}$.

7. *(3 Punkte)* Seien $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ mit $a > b$. Die folgende Skizze zeigt die Ellipse

$$E := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\},$$

die Brennpunkte F_1 und F_2 und die Leitgeraden G_1 und G_2.



Die Exzentrizität der Ellipse ist $\varepsilon = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \in \mathbb{R}_{>0}$.

Formulieren Sie die drei (in der Vorlesung so genannten) *ästhetischen Eigenschaften.*

Lösung:

(1)

$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d(P,F_i)}{d(P,G_i)} = \varepsilon\} \quad \text{für } i \in \{1,2\}.$$

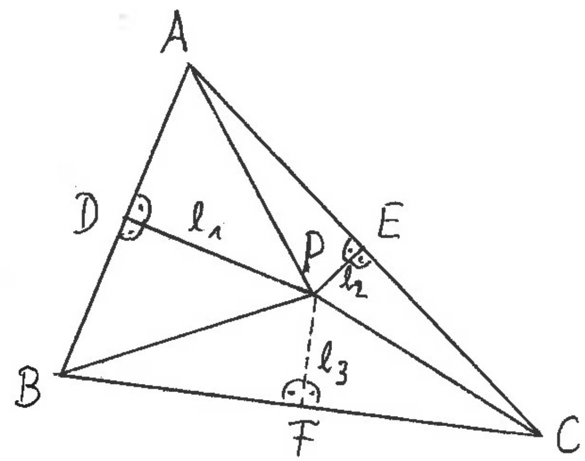
(2)
$$E = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid d(P, F_1) + d(P, F_2)\} = 2a.$$

(3) Eintrittswinkel = Austrittswinkel. Genauer: Ein Lichtstrahl, der in F_1 startet und an der Ellipse reflektiert wird, läuft danach durch F_2.

8. *(3 Punkte)* Satz vom Mittelsenkrechtenschnittpunkt: *Die drei Mittelsenkrechten eines Dreiecks schneiden sich in einem Punkt.*

Beweisen Sie diesen Satz und machen Sie eine Skizze zu Ihrem Beweis.

Lösung:



l_1 := die Mittelsenkrechte auf AB.

D := der Schnittpunkt von l_1 mit AB.

l_2 := die Mittelsenkrechte auf AC.

E := der Schnittpunkt von l_2 mit AC.

P := der Schnittpunkt von l_1 und l_2.

l_3 := das Lot von P auf BC.

F := der Schnittpunkt von l_3 mit BC.

Die Dreiecke $\Delta(ADP)$ und $\Delta(BDP)$ sind kongruent, denn die Winkel in D sind gleich (nämlich beide $\pi/2$) und $d(A, D) = d(B, D)$, $d(D, P) = d(D, P)$. Daher ist $d(B, P) = d(A, P)$.

Analog folgt $d(A, P) = d(C, P)$. Es folgt $d(B, P) = d(C, P)$.

Die Dreiecke $\Delta(BPF)$ und $\Delta(CPF)$ sind kongruent, denn zwei Seiten sind gleich lang, nämlich $d(B, P) = d(C, P)$ und $d(P, F) = d(P, F)$, und die der längeren Seite gegenüberliegenden Winkel sind gleich (die Winkel in F sind beide $\pi/2$).

Daher ist $d(B, F) = d(C, F)$. Daher ist l_3 die Mittelsenkrechte auf BC. Daher ist P der Schnittpunkt der drei Mittelsenkrechten.