

# Geometrie

Teile einer Vorlesung im FSS 2018

Mannheim

Claus Hertling

31.01.2018

## Contents

0	Einleitung	2
1	Begriffe der affinen Geometrie	3
2	Elementargeometrische Figuren und ihre Eigenschaften: [AF15, Kap 1]	9
3	Symmetrien der Ebene und des Raumes	9
4	Begriffe der projektiven Geometrie	14
5	Hyperbolische Geometrie: [AF15, Kap 3]	15
6	Kegelschnitte	15

# 0 Einleitung

Die Studenten des Lehramts Mathematik in Baden-Württemberg sollen laut Verordnung des Kultusministeriums (vom 31.07.2009) über die erste Staatsprüfung für das Lehramt an Gymnasien (Anlage A: Prüfungsfächer) im Bereich Geometrie folgende verbindliche Studieninhalte lernen:

- (1) Grundlagen der affinen, euklidischen und projektiven Geometrie
- (2) Parallel- und Zentralprojektion
- (3) Einblicke in eine nichteuklidische Geometrie
- (4) Isometriegruppen euklidischer Räume, Platonische Körper
- (5) Eulersche Polyederformel, Eulerzahl
- (6) Geometrie der Kegelschnitte

Die 2-stündige Vorlesung Geometrie in Mannheim im FSS 2016 deckt diese Studieninhalte ab. In etwas mehr als der Hälfte des Stoffs wird sie eng dem Buch [AF15] folgen. Der andere Teil des Stoffs steht in diesem Manuskript. Das Buch behandelt (wenn auch in anderer Reihenfolge) die Themen (3) bis (6) und vieles zur affinen und euklidischen Geometrie.

Es führt allerdings nicht die Begriffe der affinen und der projektiven Geometrie ein. Gute Referenzen für sie sind die Bücher [Fi78] und [Kl92]. Allerdings werden diese Begriffe in diesem Manuskript ausgeführt, die affine Geometrie im nächsten Kapitel, die projektive Geometrie später. Der Inhalt des Buchs [AF15] wird dagegen in diesem Manuskript nicht wiederholt.

In der Vorlesung werden große Teil von Kapitel 1 und 3 des Buchs [AF15] behandelt.

Ein sehr schönes Buch, das alle Themen (1) bis (6) abdeckt, ist [Co63]. Aber für die Vorlesung ist es zu ausführlich und im Stil zu altmodisch.

## References

- [AF15] Ilka Agricola, Thomas Friedrich: Elementargeometrie. Fachwissen für Studium und Mathematikunterricht. 4., überarbeitete Auflage. Springer Spektrum, Springer Fachmedien Wiesbaden GmbH 2015, ISBN 978-3-658-06730-4 (Online-Version ISBN 978-3-658-06731-1 (eBook)).
- [Co63] H.S.M. Coxeter: Unvergängliche Geometrie. Birkhäuser Verlag, 1963.
- [Fi78] Gerd Fischer: Analytische Geometrie. Vieweg, Grundkurs Mathematik, 1978.
- [Kl92] Wilhelm Klingenberg: Lineare Algebra und Geometrie. 3. Auflage, Springer-Verlag, 1992.

# 1 Begriffe der affinen Geometrie

Affine Geometrie spielt sich in einem affinen Raum ab. Ein affiner Raum ist im wesentlichen ein (meistens endlich-dimensionaler und reeller) Vektorraum, bei dem man die besondere Rolle des Nullpunkts vergißt. Man kann das gut mit einem Vektorraum modellieren, und so wird es auch in [AF15] gemacht.

Dieses Kapitel soll aber eine saubere Definition eines affinen Raums geben und auch eine Reihe weiterer klassischer Begriffe der affinen Geometrie präsentieren, die man kennen sollte. Alle Aussagen hier sind leicht verständlich. Auf Beweise wird hier weniger Wert gelegt (ein wenig wird in den Übungen geleistet). Die konkrete schöne Geometrie in [AF15, Kap. 2] kommt allerdings weitgehend ohne diese Begriffe aus.

**Definition 1.1** Ein affiner Raum ist ein Tripel  $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$ . Hier ist  $\mathcal{A}$  eine nichtleere Menge,  $T(\mathcal{A})$  ist ein  $K$ -Vektorraum, und

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\rightarrow T(\mathcal{A}) \\ (x, y) &\mapsto \overrightarrow{xy} \end{aligned}$$

ist eine Abbildung mit den folgenden zwei Eigenschaften:

$$(i) \quad \forall x, y, z \in \mathcal{A} \quad \text{ist} \quad \overrightarrow{xy} + \overrightarrow{yz} = \overrightarrow{xz}.$$

(ii) Für jeden Punkt  $p \in \mathcal{A}$  ist die Abbildung

$$\varphi_{\mathcal{A},p} := \varphi_{\mathcal{A}}(p, \cdot) : \mathcal{A} \rightarrow T(\mathcal{A}), \quad x \mapsto \overrightarrow{px},$$

bijektiv.

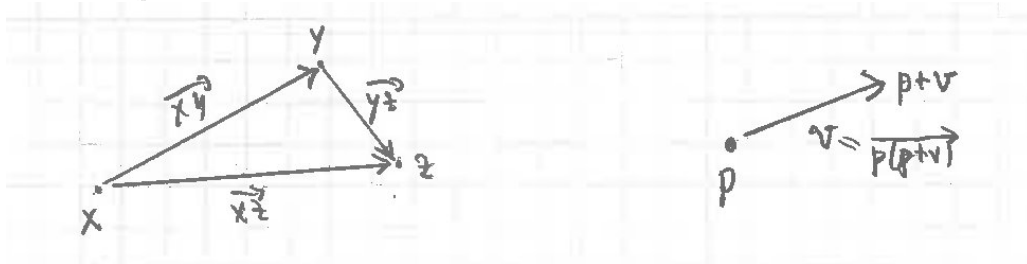
Häufig nennt man  $\mathcal{A}$  den affinen Raum und unterdrückt  $T(\mathcal{A})$  und  $\varphi_{\mathcal{A}}$ .  $T(\mathcal{A})$  ist der zu  $\mathcal{A}$  gehörige Vektorraum. Er wird Tangentialraum von  $\mathcal{A}$  genannt.

Die Dimension des affinen Raums  $\mathcal{A}$  ist

$$\dim \mathcal{A} := \dim T(\mathcal{A}).$$

Ein affiner Raum  $\mathcal{A}$  mit  $\dim \mathcal{A} = 0$  bzw. 1 bzw. 2 heißt Punkt bzw. Gerade bzw. Ebene.

Die Abbildung  $\varphi_{\mathcal{A}}$  ordnet zwei Punkten  $x$  und  $y$  im affinen Raum den Verbindungsvektor  $\overrightarrow{xy}$  zu.  $\varphi_{\mathcal{A},p}$  bildet  $p$  auf den Nullpunkt  $0 \in T(\mathcal{A})$  ab.



Punkte in  $\mathcal{A}$  und Vektoren in  $T(\mathcal{A})$  kann man addieren: Der Punkt

$$p + v := \varphi_{\mathcal{A},p}^{-1}(v) \in \mathcal{A}$$

ist die Summe von  $p \in \mathcal{A}$  und  $v \in T(\mathcal{A})$ . Natürlich ist dann  $v = \overrightarrow{p(p+v)}$ . Der Vektorraum  $T(\mathcal{A})$  operiert so auf  $\mathcal{A}$  durch *Translationen* (siehe unten Definition 1.4 (c)):

$$\begin{aligned} T(\mathcal{A}) \times \mathcal{A} &\rightarrow \mathcal{A}, \\ (v, p) &\mapsto p + v, \\ \text{mit} &\quad p + (v_1 + v_2) = (p + v_1) + v_2. \end{aligned}$$

Die Operation ist *einfach transitiv*, d.h.

$$\forall p, q \in \mathcal{A} \exists! v \in T(\mathcal{A}) \text{ mit } q = p + v, \\ \text{n\u00e4mlich } v = \overrightarrow{pq}.$$

Das gibt eine alternative Definition eines affinen Raums [Fi78]: *Ein affiner Raum ist eine Menge  $\mathcal{A}$  zusammen mit einem Vektorraum  $T(\mathcal{A})$  und einer einfach transitiven Operation von  $T(\mathcal{A})$  (als additiver Gruppe) auf  $\mathcal{A}$ .*

Der Vektorraum  $T(\mathcal{A})$  selber ist ein Modell von  $\mathcal{A}$ , in folgendem Sinn: Wenn  $V$  irgendein Vektorraum ist, so ist das Tripel  $(V, V, \varphi_V)$  mit

$$\varphi_V(x, y) = \overrightarrow{xy} := y - x$$

ein affiner Raum. Im Fall von  $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$  wird das Tripel  $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$  durch irgendein  $(\varphi_{\mathcal{A},p}, \text{id}, \cdot \circ \varphi_{\mathcal{A},p}^{-1} \times \varphi_{\mathcal{A},p}^{-1})$  isomorph auf das Tripel  $(T(\mathcal{A}), T(\mathcal{A}), \varphi_{T(\mathcal{A})})$  abgebildet. Eigentlich reicht es, das Modell  $(V, V, \varphi_V)$  eines affinen Raums anzusehen.

**Definition 1.2** *Sei  $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$  ein affiner Raum. Ein affiner Unterraum ist ein Tripel  $(\mathcal{B}, T(\mathcal{B}), \varphi_{\mathcal{B}})$ , wobei  $T(\mathcal{B}) < T(\mathcal{A})$  ein Untervektorraum ist und  $\mathcal{B} = \varphi_{\mathcal{A},p}^{-1}(T(\mathcal{B})) \subset \mathcal{A}$  f\u00fcr ein  $p \in \mathcal{A}$  ist, und wo  $\varphi_{\mathcal{B}}$  die Einschr\u00e4nkung von  $\varphi_{\mathcal{A}}$  auf  $\mathcal{B}$  ist. Dann ist offenbar  $\mathcal{B}$  das Bild der Abbildung*

$$T(\mathcal{B}) \rightarrow \mathcal{A}, \quad v \mapsto p + v.$$

**Lemma 1.3** (a) *Insbesondere ist ein affiner Unterraum ein affiner Raum.*

(b) *Im Modell  $(V, V, \varphi)$  ist ein affiner Unterraum einfach eine Teilmenge der Gestalt*

$$p + W := \{p + w \mid w \in W\}$$

*mit  $W < V$  ein Untervektorraum und  $p \in V$ , und mit der induzierten Struktur als affiner Raum.*

(c) *Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum, und seien  $\mathcal{A}_i, i \in I$ , affine Unterr\u00e4ume. Dann ist auch  $\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i$  ein affiner Raum, oder der Schnitt ist leer. Im ersten Fall ist  $T(\cap_{i \in I} \mathcal{A}_i) = \cap_{i \in I} T(\mathcal{A}_i)$ .*

(d) *Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum, und seien  $\mathcal{A}_i, i \in I$ , affine Unterr\u00e4ume. Dann gibt es einen eindeutigen kleinsten affinen Unterraum*

$$\bigvee_{i \in I} \mathcal{A}_i \subset \mathcal{A},$$

*der alle  $\mathcal{A}_i$  enth\u00e4lt. Er hei\u00dft Verbindungsraum der affinen Unterr\u00e4ume  $\mathcal{A}_i$ . Im Fall von 2 Punkten  $p$  und  $q$  (= affinen R\u00e4umen der Dimension 0) ist er die Verbindungsgerade  $\{p\} \vee \{q\}$  zwischen  $p$  und  $q$ , und man l\u00e4\u00dft gern die Mengenklammern weg:  $p \vee q$ .*

(e) Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum, und seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zwei affine Unterräume. Falls  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$  ist, gilt

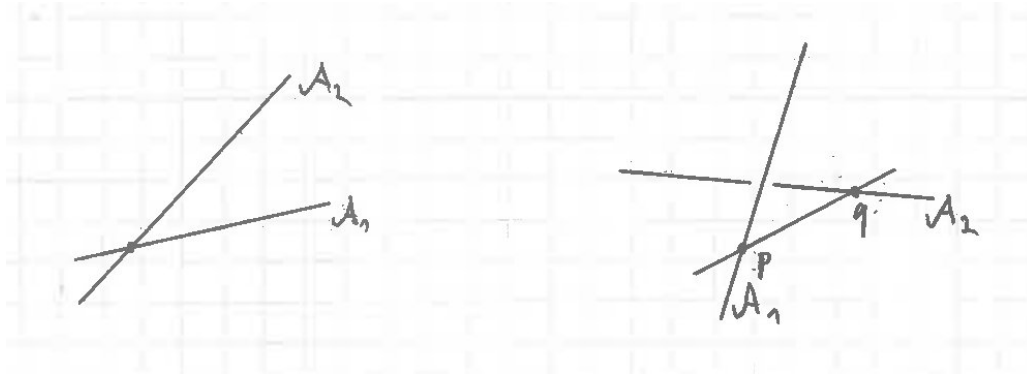
$$\begin{aligned} T(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) &= T(\mathcal{A}_1) + T(\mathcal{A}_2), \\ \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) &= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2). \end{aligned}$$

Falls  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$  ist, gilt für beliebige Punkte  $p \in \mathcal{A}_1$  und  $q \in \mathcal{A}_2$

$$\begin{aligned} T(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) &= (T(\mathcal{A}_1) + T(\mathcal{A}_2)) \oplus T(p \vee q), \\ \dim(\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2) &= \dim \mathcal{A}_1 + \dim \mathcal{A}_2 - \dim(T(\mathcal{A}_1) \cap T(\mathcal{A}_2)) + 1. \end{aligned}$$

**Beweis:** Nicht hier, teilweise in den Übungen. □

Den Teil (e) des Satzes macht man sich am besten klar im Fall  $\mathcal{A} = \mathbb{R}^3$  und  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  zwei Geraden. Im Fall  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$  schneiden sie sich, und  $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2$  ist die von ihnen erzeugte Ebene. Im Fall  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 = \emptyset$  sind sie *windschief* im  $\mathbb{R}^3$ , und dann ist  $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \mathcal{A} = \mathbb{R}^3$ .



**Definition/Lemma 1.4** (a) (Definition) Seien  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  zwei affine Räume mit Vektorräumen  $T(\mathcal{A})$  und  $T(\mathcal{B})$  über demselben Körper  $K$ . Eine Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  heißt affine Abbildung, falls es eine lineare Abbildung (= ein Vektorraumhomomorphismus)  $T(f) : T(\mathcal{A}) \rightarrow T(\mathcal{B})$  mit

$$\forall x, y \in \mathcal{A} \quad \overrightarrow{f(x)f(y)} = T(f)(\overrightarrow{xy})$$

gibt. Eine bijektive affine Abbildung wird manchmal Affinität genannt.

(b) (Lemma) Dann ist  $T(f)$  eindeutig bestimmt und heißt der Linearteil von  $f$ . Tatsächlich ist  $T(f) = f'$  die (konstante) 1. Ableitung von  $f$ . Ist  $g : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}$  eine zweite affine Abbildung, so ist auch

$$g \circ f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$

eine affine Abbildung, und es ist

$$T(g \circ f) = T(g) \circ T(f) : T(\mathcal{A}) \rightarrow T(\mathcal{C}).$$

(Die letzte Gleichung ist ein Spezialfall der Kettenregel.)

(c) (Definition) Eine affine Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  mit  $T(f) = \text{id}$  wird Translation genannt. Eine affine Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  mit  $T(f) = \lambda \cdot \text{id}$  mit  $\lambda \in K^*$  wird Dilatation genannt.

(d) Sind  $V$  und  $W$  Vektorräume über demselben Körper  $K$ , so ist eine affine Abbildung  $f$  vom affinen Raum  $(V, V, \varphi_V)$  in den affinen Raum  $(W, W, \varphi_W)$  einfach die Komposition der linearen Abbildung  $T(f) : V \rightarrow W$  mit der Translation auf  $W$  um  $f(0)$ ,

$$f(p) = T(f)(p) + f(0) \quad \forall p \in V.$$

**Beweis:** Übung. □

**Lemma/Definition 1.5** Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum.

(a) (Lemma) Seien  $p_0, p_1, \dots, p_n \in \mathcal{A}$ . Folgende Eigenschaften sind äquivalent:

(i) Der affine Unterraum  $p_0 \vee \dots \vee p_n$  hat Dimension  $n$ .

(ii) Die Vektoren  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \overrightarrow{p_0 p_2}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n} \in T(\mathcal{A})$  sind linear unabhängig.

Offenbar ist die Eigenschaft (i) unabhängig von der Reihenfolge bzw. Nummerierung der Punkte  $p_0, \dots, p_n$ .

(b) (Definition) Punkte  $p_0, \dots, p_n$  mit den Eigenschaften (i) und (ii) heißen *affin unabhängig*. Falls  $n = \dim \mathcal{A}$  ist und (i) und (ii) gelten, bilden die Vektoren  $\overrightarrow{p_0 p_1}, \dots, \overrightarrow{p_0 p_n}$  eine Basis von  $T(\mathcal{A})$ . Dann bilden die Punkte  $p_0, \dots, p_n$  eine *affine Basis*.

(c) (Lemma) Seien  $p_0, \dots, p_n \in \mathcal{A}$  eine affine Basis. Dann ist die Abbildung

$$\Phi_{\mathbf{p}} : \mathcal{A} \rightarrow K^n, \quad q \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \text{mit } q = p_0 + \sum_{i=1}^n x_i \cdot \overrightarrow{p_0 p_i}$$

affin und ein Isomorphismus affiner Räume.

(Definition) Die so definierten Funktionen  $x_1, \dots, x_n$  auf  $\mathcal{A}$  heißen *affine Koordinaten*. Sie verallgemeinern natürlich die Koordinaten, die man auf einem endlich-dimensionalen Vektorraum durch Wahl einer Basis erhält.

(d) (Lemma) Seien  $p_0, \dots, p_n \in \mathcal{A}$  eine affine Basis, und seien  $q_0, \dots, q_n \in \mathcal{B}$  Punkte in einem zweiten affinen Raum  $\mathcal{B}$ . Dann gibt es eine eindeutige affine Abbildung

$$f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B} \quad \text{mit} \quad f(p_i) = q_i.$$

Sie ist injektiv genau dann, wenn  $q_0, \dots, q_n$  affin unabhängig sind. Sie ist ein Isomorphismus genau dann, wenn  $q_0, \dots, q_n$  eine affine Basis von  $\mathcal{B}$  sind.

**Beweis:** Übung. □

Drei Punkte  $p_0, p_1, p_2$  in einem affinen Raum  $\mathcal{A}$  heißen *kollinear*, falls  $\dim(p_0 \vee p_1 \vee p_2) \leq 1$  ist. Eine Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  zwischen affinen Räumen  $\mathcal{A}$  und  $\mathcal{B}$  (über demselben Körper  $K$ ) heißt *Kollineation*, falls sie bijektiv ist und Tripel kollinearere Punkte wieder auf Tripel kollinearere Punkte abbildet. Offensichtlich sind affine Isomorphismen Kollineationen. Aber es kann abhängig von  $K$  eventuell mehr Kollineationen geben. Der folgende Satz macht das präzise.

**Satz 1.6** (Hauptsatz der affinen Geometrie) Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum mit  $\dim \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$  und mit  $|K| \geq 3$ . Dann ist eine bijektive Abbildung  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$  eine Kollineation, wenn für irgendeine affine Basis  $\mathbf{p} = (p_0, \dots, p_n)$  die Kollineation

$$\Phi_{\mathbf{p}} \circ f \circ \Phi_{\mathbf{p}}^{-1} : K^n \rightarrow K^n$$

die Gestalt

$$\Phi_{\mathbf{p}} \circ f \circ \Phi_{\mathbf{p}}^{-1} = g \circ \kappa$$

hat, wobei  $g : K^n \rightarrow K^n$  ein affiner Automorphismus ist und  $\kappa : K^n \rightarrow K^n$  die durch einen Körperautomorphismus  $\kappa : K \rightarrow K$  induzierte Abbildung ist.

**Beweis:** Der Beweis ist etwas mühsam und wird hier nicht ausgeführt. □

**Bemerkungen 1.7** (i)  $\mathbb{Q}$  und  $\mathbb{R}$  haben nur  $\text{id}$  als Körperautomorphismus. Also sind bei affinen Räumen mit Dimension  $\geq 2$  über  $\mathbb{Q}$  oder  $\mathbb{R}$  die Kollineationen genau die affinen Abbildungen.

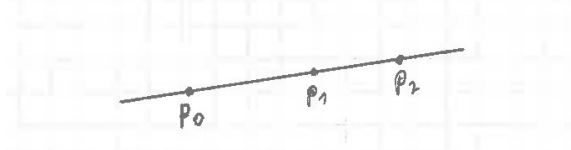
(ii) Die komplexe Konjugation  $\bar{\cdot} : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  ist ein Körperautomorphismus und induziert eine Kollineation  $\bar{\cdot} : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$  (für  $n \geq 2$ ), die nicht affin ist. Tatsächlich hat  $\mathbb{C}$  auch noch überabzählbar viele Automorphismen  $\kappa$  mit  $\kappa(\mathbb{R}) \neq \mathbb{R}$ . Sie alle induzieren Kollineationen auf  $\mathbb{C}^n$ . Aber diese Automorphismen und diese Kollineationen sind nicht stetige Abbildungen.

(iii) In den Übungen werden die Ausnahmefälle  $\dim \mathcal{A} = 1$  und  $|K| = 2$  von Satz 1.6 behandelt.

Ein in der affinen Geometrie nützlicher Begriff ist das *Teilungsverhältnis*  $TV(p_0, p_1, p_2) \in K$  von drei Punkten  $p_0, p_1, p_2$  in einem affinen Raum, die  $p_0 \neq p_1$  und  $p_2 \in p_0 \vee p_1$  erfüllen. Es ist die durch

$$\overrightarrow{p_0 p_2} = TV(p_0, p_1, p_2) \cdot \overrightarrow{p_0 p_1}$$

definierte Zahl.



**Lemma 1.8** Das Teilungsverhältnis ist invariant unter affinen Abbildungen. Das heißt, wenn  $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$  eine affine Abbildung ist und  $p_0, p_1, p_2 \in \mathcal{A}$  die Eigenschaften  $p_0 \neq p_1, p_2 \in p_0 \vee p_1$  und  $f(p_0) \neq f(p_1)$  erfüllen, so gilt

$$TV(p_0, p_1, p_2) = TV(f(p_0), f(p_1), f(p_2)).$$

**Beweis:** Übung. □

Das Teilungsverhältnis und seine Invarianz sind nützlich, um elementare Sätze der affinen Geometrie zu beweisen (Übung).

Schließlich kommen wir zur *Parallelprojektion* in der affinen Geometrie. Das folgende Lemma ist eine Erinnerung an die direkte Summe von Untervektorräumen.

**Lemma/Definition 1.9** (a) (Lemma) Sei  $V$  ein Vektorraum, und seien  $V_1$  und  $V_2$  zwei Untervektorräume. Folgende Bedingungen sind äquivalent

(i)  $V_1 \cap V_2 = \{0\}$ .

(ii) Jeder Vektor  $v \in V_1 + V_2$  läßt sich auf eindeutige Weise als Summe  $v = v_1 + v_2$  mit  $v_1 \in V_1$  und  $v_2 \in V_2$  schreiben.

(iii)  $\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2$ .

(b) (Definition) Wenn diese Bedingungen gelten, ist die Summe  $V_1 + V_2$  eine direkte Summe, Notation:  $V_1 \oplus V_2$ .

**Lemma/Definition 1.10** Sei  $\mathcal{A}$  ein affiner Raum endlicher Dimension, und seien  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  affine Unterräume mit  $T(\mathcal{A}_1) \oplus T(\mathcal{A}_2) = T(\mathcal{A})$ .

(a) (Lemma) Dann gilt

$$\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset \text{ und } \mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \mathcal{A},$$

und jeder Punkt  $p \in \mathcal{A}$  läßt sich auf eindeutige Weise als Summe  $p = p_1 + v_2$  mit  $p_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $v_2 \in T(\mathcal{A}_2)$  schreiben.

(b) (Definition) Daher ist die Abbildung

$$pr_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}_1, \quad p \mapsto p_1$$

wohldefiniert. Sie heißt Parallelprojektion von  $\mathcal{A}$  auf  $\mathcal{A}_1$  entlang  $\mathcal{A}_2$ .

(c) (Lemma) Ist  $\mathcal{A}_3 \subset \mathcal{A}_2$  ein weiterer affiner Unterraum mit  $T(\mathcal{A}_3) \oplus T(\mathcal{A}_2) = T(\mathcal{A})$ , so ist die Einschränkung der Parallelprojektion auf  $\mathcal{A}_3$ ,

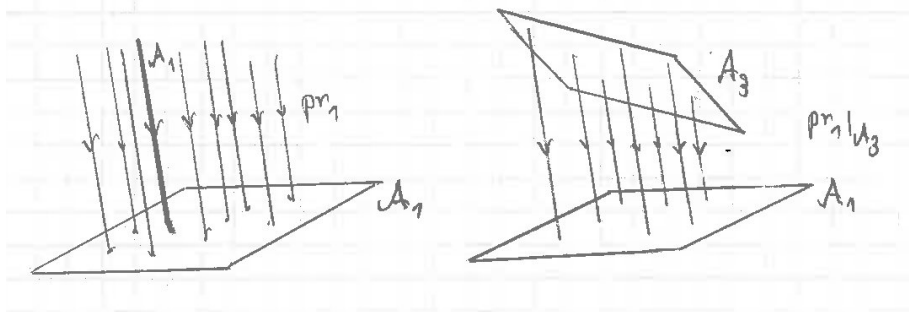
$$pr_1 : \mathcal{A}_3 \rightarrow \mathcal{A}_1$$

ein affiner Isomorphismus.

**Beweis:** (a) Lemma 1.3 (e) zeigt, dass hier der Fall  $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$  vorliegt und dass  $\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \mathcal{A}$  gilt. Ist  $p = p_1 + v_2 = p'_1 + v'_2$  mit  $p_1, p'_1 \in \mathcal{A}_1$  und  $v_2, v'_2 \in T(\mathcal{A}_2)$ , so ist  $0 = p_1 p'_1 + (v'_2 - v_2)$ . Mit  $T(\mathcal{A}_1) \cap T(\mathcal{A}_2) = \{0\}$  folgt  $p'_1 = p_1$  und  $v'_2 = v_2$ .

(c) Es reicht zu zeigen, dass  $T(pr_1|_{\mathcal{A}_3})$  ein Isomorphismus ist. Weil der Kern von  $T(pr_1) : T(\mathcal{A}) \rightarrow T(\mathcal{A}_1)$  nach Definition der Projektion gerade  $T(\mathcal{A}_2)$  ist und weil  $T(\mathcal{A}_3) \cap T(\mathcal{A}_2) = \{0\}$  gilt, ist  $T(pr_1|_{\mathcal{A}_3})$  injektiv. Weil  $T(\mathcal{A}_1)$  und  $T(\mathcal{A}_3)$  die gleiche Dimension haben, ist  $T(pr_1|_{\mathcal{A}_3})$  ein Isomorphismus.  $\square$

Der historisch wohl wichtigste Fall einer Parallelprojektion ist der Fall  $\dim \mathcal{A} = 3, \dim \mathcal{A}_2 = 1, \dim \mathcal{A}_1 = \dim \mathcal{A}_3 = 2$ . Hier ist eine Skizze dazu.





## 2 Elementargeometrische Figuren und ihre Eigenschaften: [AF15, Kap 1]

Aus [AF15, Kap 1] folgendes:

1.1: ganz (teilweise mit eigenen, kürzeren Beweisskizzen).

1.2: 1.2.1 bis 1.2.6, und von 1.2.8 nur Satz 25, und den ohne Beweis. 1.2.7 und 1.2.9 nicht.

1.3: nur 1.3.1 und 1.3.2 und 1.3.6. Nicht 1.3.3., 1.3.4, 1.3.5 und 1.3.7.

1.5: ganz. (Die halbbregulären Polyeder muß man nicht auswendig wissen.)

## 3 Symmetrien der Ebene und des Raumes

Der  $\mathbb{R}^n$  wird mit dem Spaltenvektorraum  $M(n \times 1, \mathbb{R})$  identifiziert. Dann operieren Matrizen in  $M(n \times n, \mathbb{R})$  durch Linksmultiplikation auf dem  $\mathbb{R}^n$ . Die orthogonale Gruppe

$$O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$$

ist dann die Gruppe der orthogonalen Automorphismen des  $\mathbb{R}^n$ . Das sind die Isometrien, die den Nullpunkt  $0 \in \mathbb{R}^n$  festlassen.

Ein Satz der Linearen Algebra sagt, dass eine beliebige Isometrie eine Komposition aus einem orthogonalen Automorphismus und einer Translation ist:

*Sei  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  eine Isometrie. Dann existieren eine orthogonale Matrix  $A \in O(n)$  und eine Vektor  $B \in \mathbb{R}^n$  derart, dass für alle  $P \in \mathbb{R}^n$  gilt:*

$$f(P) = A \cdot P + B.$$

Hier wird zuerst die orthogonale Abbildung ausgeführt, und danach die Translation.

Im folgenden wird zuerst ein Satz der Linearen Algebra II zitiert, der eine Normalform zu den orthogonalen Matrizen und eine Übersicht über orthogonale Abbildungen liefert. Danach werden die Spezialfälle der Ebene  $\mathbb{R}^2$  und des Raums  $\mathbb{R}^3$  diskutiert. Schließlich werden in 2 Sätzen für  $\mathbb{R}^2$  und  $\mathbb{R}^3$  die allgemeinen Isometrien klassifiziert, die nicht notwendig den Nullpunkt festlassen. Dazu müssen die Kompositionen der orthogonalen Abbildungen mit Translationen studiert werden.

Notationen im folgenden Satz:  $E_k$  ist die  $k \times k$ -Einheitsmatrix.  $\text{Eig}(f, \lambda)$  ist der Eigenraum zum Eigenwert  $\lambda$  eines Endomorphismus  $f$  eines Vektorraums.

**Satz 3.1** (Spektralsatz für orthogonale Matrizen und Endomorphismen)

a) (Matrix-Version) Sei  $A \in GL(n, \mathbb{R})$  eine orthogonale Matrix, d.h.  $A^t = A^{-1}$ . Dann gibt es eine orthogonale Matrix  $T \in GL(n, \mathbb{R})$ , so daß  $T^{-1} \cdot A \cdot T$  die Block-Gestalt hat (wo



enthält neben den Drehungen auch die Spiegelungen  $s_v$  an Geraden  $\mathbb{R} \cdot v$  mit  $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$ . Bei  $O(2)$  parametrisiert die eine  $S^1$  die Drehungswinkel der Drehungen, und die andere  $S^1$  parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen. Die Drehungen haben Determinante  $+1$ , die Spiegelungen haben Determinante  $-1$ . Etwas mehr zu den Drehungen und Spiegelungen des  $\mathbb{R}^2$  kommt in einem Aufgabenblatt.

**Beispiel 3.3** Im Fall  $n = 3$  liefert der Satz die folgenden 6 Normalformen:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\},$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \text{ für } \alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}.$$

Das erste ist die identische Abbildung, das zweite ist eine Spiegelung an der Ebene  $\mathbb{R} \cdot e_1 + \mathbb{R} \cdot e_2$ , das dritte ist eine Drehung um den Winkel  $\pi$  mit Drehachse  $\mathbb{R} \cdot e_1$ , das vierte ist eine Drehspiegelung (s.u.), deren Drehung um den Winkel  $\pi$  dreht (es ist auch die Punktspiegelung). Die fünfte Normalform gibt alle Drehungen um Winkel  $\alpha \in (0, 2\pi) - \{\pi\}$  mit Drehachse  $\mathbb{R} \cdot e_1$ .

Die sechste Normalform ist eine Drehspiegelung: Sie ist die Komposition zweier kommutierender orthogonaler Abbildungen, deren eine eine Drehung mit Drehachse  $\mathbb{R} \cdot e_1$  ist und deren andere eine Spiegelung an der dazu senkrechten Ebene  $\mathbb{R} \cdot e_2 + \mathbb{R} \cdot e_3$  ist.

Also zerfallen die orthogonalen Automorphismen des  $\mathbb{R}^3$  in 4 Klassen, die Identität, die (echten) Drehungen, die Spiegelungen und die Drehspiegelungen. Die Gruppe

$$SO(3) = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$$

enthält die orientierungserhaltenden orthogonalen Automorphismen, das sind die Identität und die Drehungen. Die Gruppe

$$O(3) = SO(3) \cup SO(3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

enthält auch die orientierungsumkehrenden orthogonalen Abbildungen, nämlich die Spiegelungen und die Drehspiegelungen.

Eine Drehung ist durch die orientierte Drehachse  $\mathbb{R} \cdot v \subset \mathbb{R}^3$  und den Drehwinkel  $\alpha \in (0, 2\pi)$  bestimmt. Wenn man die Orientierung der Drehachse ändert und die Winkel durch  $2\pi - \alpha$  ersetzt, erhält man dieselbe Drehung.

Eine Spiegelung ist durch die Spiegelungsebene bestimmt. Eine Drehspiegelung ist (wie die darin enthaltene Drehung) durch die orientierte Drehachse und den Drehwinkel bestimmt.

**Satz 3.4** (a) Die Isometrien des affinen Raums  $\mathbb{R}^2$  lassen sich über die Fixpunktmen- gen von ihnen klassifizieren. Die Isometrien, die Fixpunkte haben, sind aus dem Beispiel 3.2 schon bekannt: Sei  $f$  eine Isometrie mit einem Fixpunkt  $P$ .

Dann trägt der affine Raum  $\mathbb{R}^2$  eine eindeutige euklidische Vektorraumstruktur mit  $P$  als neuen Nullpunkt, und  $f$  wird zu einer orthogonalen Abbildung dieses euklidischen Vektorraums.

Die Fixpunktmenge ist entweder der  $\mathbb{R}^2$  (bei  $\text{id}$ ) oder eine Gerade (bei einer Spiegelung) oder ein Punkt (bei einer Drehung).

(b) Zu den 3 Klassen im Beispiel 3.2 kommen 2 Klassen von fixpunktfreien Isometrien hinzu, die Translationen und die Gleitspiegelungen.

Translationen sind klar, jede Translation ist durch den Translationsvektor bestimmt.

Eine Gleitspiegelung ist eine Komposition aus einer Translation mit einem Translationsvektor  $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$  und einer Spiegelung an einer Geraden  $L \subset \mathbb{R}^2$ , deren Tangentialraum gleich  $\mathbb{R} \cdot v$  ist.

(c) Die Kompositionen von Drehungen und Spiegelungen mit Translationen sind Elemente in folgenden Klassen:

$$\text{Translation} \circ \text{Drehung} \in \{\text{Drehungen}\},$$

$$\text{Translation} \circ \text{Spiegelung} \in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\}.$$

**Beweis:** Übung

□

**Satz 3.5** (a) Die Isometrien des affinen Raums  $\mathbb{R}^3$  lassen sich über die Fixpunktmen- gen von ihnen klassifizieren. Die Isometrien, die Fixpunkte haben, sind aus dem Beispiel 3.3 schon bekannt: Sei  $f$  eine Isometrie mit einem Fixpunkt  $P$ . Dann trägt der affine Raum  $\mathbb{R}^3$  eine eindeutige euklidische Vektorraumstruktur mit  $P$  als neuen Nullpunkt, und  $f$  wird zu einer orthogonalen Abbildung dieses euklidischen Vektorraums.

Die Fixpunktmenge ist entweder der  $\mathbb{R}^3$  (bei  $\text{id}$ ) oder eine Ebene (bei einer Spiegelung) oder eine Gerade (bei einer Drehung) oder ein Punkt (bei einer Drehspiegelung).

(b) Zu den 4 Klassen im Beispiel 3.3 kommen 3 Klassen von fixpunktfreien Isometrien, die Translationen, die Gleitspiegelungen und die Schraubungen.

Translationen sind klar, jede Translation ist durch den Translationsvektor bestimmt.

Eine Gleitspiegelung ist eine Komposition aus einer Translation mit einem Translationsvektor  $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  und einer Spiegelung an einer Ebene, deren Tangentialraum den Translationsvektor enthält.

Bemerkung: Die Einschränkung einer Gleitspiegelung auf die Spiegelungsebene ist dort eine Translation. Dagegen ist die Einschränkung einer Drehspiegelung auf die Spiegelungsebene dort eine Drehung.

Eine Schraubung ist eine Komposition aus einer Translation mit einem Translationsvektor  $v \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$  und einer Drehung mit einer Drehachse, deren Tangentialraum  $\mathbb{R} \cdot v$  ist.

(c) Die Kompositionen von Drehungen, Spiegelungen und Drehspiegelungen mit Translationen sind Elemente in folgenden Klassen:

$$\text{Translation} \circ \text{Drehung} \in \{\text{Drehungen}\} \cup \{\text{Schraubungen}\},$$

$$\text{Translation} \circ \text{Spiegelung} \in \{\text{Spiegelungen}\} \cup \{\text{Gleitspiegelungen}\},$$

$$\text{Translation} \circ \text{Drehspiegelung} \in \{\text{Drehspiegelungen}\}.$$

**Beweis:** Übung. □

Nützlich für die Beweise der Sätze 3.4 und 3.5 ist der oben zitierte Satz, dass jede Isometrie  $f$  des  $\mathbb{R}^n$  sich eindeutig als  $f(P) = A \cdot P + B$  schreiben läßt, d.h. dass es sich eindeutig als Komposition einer orthogonalen Abbildung  $T(f) (\sim A)$  und einer Translation  $t(f)$  mit  $t(f)(Q) = B + Q$  schreiben läßt,

$$f = t(f) \circ T(f).$$

$T(f)$  ist die Linearteil der affinen Abbildung  $f$ , und  $t(f)$  ist die Translation um  $B$ . Hier ist  $B = f(0)$ .

Auch für die Untersuchung von interessanten Untergruppen der Gruppen der Isometrien des  $\mathbb{R}^2$  und des  $\mathbb{R}^3$  ist diese Zerlegung von einzelnen Isometrien interessant. Denn die Abbildung

$$T : \text{Isom}(\mathbb{R}^n) \rightarrow O(n)$$

ist ein Gruppenhomomorphismus.

**Definition 3.6** (a) Eine Untergruppe  $G \subset \text{Isom}(\mathbb{R}^n)$  heißt diskret, falls  $T(G)$  endlich ist und falls die Translationsuntergruppe  $G \cap \{\text{Translationen}\}$  von  $G$  von den Translationen um Vektoren  $v_1, \dots, v_k$  mit  $0 \leq k \leq n$  erzeugt wird, wobei  $v_1, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$  linear unabhängig sind.

(b) Zwei diskrete Untergruppen  $G_1$  und  $G_2$  heißen ähnlich, falls es eine Affinität  $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  mit

$$G_2 = \{A^{-1} \circ g \circ A \mid g \in G_1\}$$

gibt, d.h. falls sie durch  $A$  konjugiert sind.

Man hat mehrere sehr schöne Klassifikationsresultate. Die Beweise werden hier nicht einmal angedeutet.

**Theorem 3.7** (a) Die einzigen endlichen Untergruppen der  $O(2)$  sind die zyklischen Gruppen  $C_n$ , die von einer Drehung um  $\frac{2\pi}{n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$  erzeugt werden, und die Konjugationsklassen der Diedergruppen. Jede Diedergruppe ist die Symmetriegruppe eines regulären  $n$ -Ecks.

(b) Die diskreten Untergruppen von  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ , deren Translationsgruppen isomorph zu  $\mathbb{Z}$  sind, heißen Friesgruppen. Es gibt 7 Ähnlichkeitsklassen von Friesgruppen.

(c) Die diskreten Untergruppen von  $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ , deren Translationsgruppen isomorph zu  $\mathbb{Z}^2$  sind, heißen Ornamentgruppen oder kristallographische Gruppen. Es gibt 17 Ähnlichkeitsklassen von Ornamentgruppen.

**Theorem 3.8** (a) Die einzigen endlichen Untergruppen der  $SO(3)$  sind die Konjugationsklassen der zyklischen Gruppen, der Diedergruppen und der Symmetriegruppen  $\mathcal{T}$ ,  $\mathcal{O}$  und  $\mathcal{I}$  der 5 Platonischen Körper.

(b) Die diskreten Untergruppen von  $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$ , deren Translationsgruppen isomorph zu  $\mathbb{Z}^3$  sind, heißen kristallographische Gruppen. Es gibt 230 Ähnlichkeitsklassen von kristallographischen Gruppen des  $\mathbb{R}^3$ .

## 4 Begriffe der projektiven Geometrie

Für die projektive Geometrie reicht die Zeit in dieser Vorlesung nicht mehr. Allerdings ist aus meiner Sicht die projektive Geometrie viel weniger wichtig als die meisten in der Vorlesung behandelten Themen. Daher bedaure ich es nur wenig, sie nicht ausführlich behandeln zu können.

Hier kommen nur ein paar Bemerkungen zur Einordnung und Orientierung.

Zu jedem Vektorraum  $V$  gibt es einen *projektiven Raum*  $\mathbb{P}(V)$ . Er ist die Menge der 1-dimensionalen Unterräume in  $V$ . Man hat eine natürliche Projektion  $pr_{\mathbb{P}} : V - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(V)$ , die jeden Punkt  $v \neq 0$  auf den Unterraum  $K \cdot v$  abbildet.

Meistens wird  $\dim V < \infty$  angenommen. Wenn  $V$  die Dimension  $n < \infty$  hat, hat  $\mathbb{P}(V)$  die Dimension  $n - 1$ .

Unterräume von  $\mathbb{P}(V)$  sind gerade die Bilder  $pr_{\mathbb{P}}(U)$  von Untervektorräumen  $U$  von  $V$ . Falls  $\dim U < \infty$  ist, ist  $\dim pr_{\mathbb{P}}(U) := \dim U - 1$ .

Eine injektive lineare Abbildung  $f : V \rightarrow W$  zwischen Vektorräumen  $V$  und  $W$  (über demselben Körper) induziert eine wohldefinierte Abbildung  $\mathbb{P}(f) : \mathbb{P}(V) \rightarrow \mathbb{P}(W)$ . Solche Abbildungen sind die *projektiven Morphismen*. Eine bijektive projektive Abbildung wird manchmal *Projektivität* genannt.

Sei nun  $(\mathcal{A}, T(\mathcal{A}), \varphi_{\mathcal{A}})$  ein affiner Raum endlicher Dimension. Man kann die Punkte in  $\mathbb{P}(T(\mathcal{A}))$  mit den Klassen paralleler Geraden in  $\mathcal{A}$  identifizieren. Jede solche Klasse wird als ein *unendlich ferner Punkt* aufgefaßt. Also ist

$$\mathbb{P}(T(\mathcal{A})) =: \mathbb{P}_{\infty}(\mathcal{A}) =: \{\text{die unendlich fernen Punkte in } \mathcal{A}\}.$$

Dann wird  $\mathcal{A}\mathbb{P}_{\infty}(\mathcal{A})$  zur *projektiven Kompaktifizierung* von  $\mathcal{A}$ . Und jeder affine Unterraum von  $\mathcal{A}$  hat auch eine projektive Kompaktifizierung innerhalb der von  $\mathcal{A}$ .

Es gelten schöne Eigenschaften: (Die projektiven Kompaktifizierungen von) Parallele(n) Geraden schneiden sich im gemeinsamen unendlich fernen Punkt. Bei je zwei affinen Unterräumen  $U_1$  und  $U_2$  von  $\mathcal{A}$  mit  $\dim U_1 + \dim U_2 \geq \dim \mathcal{A}$  schneiden sich ihre projektiven Kompaktifizierungen in einem projektiven Unterraum einer Dimension  $\geq \dim U_1 + \dim U_2 - \dim V$ . Das ist einfacher als in der affinen Geometrie. Und das ist ein Hauptgrund für das Arbeiten mit projektiven Räumen.

Viele Sätze der affinen Geometrie haben (einfachere) Analoga in der projektiven Geometrie, z.B. Der Hauptsatz der affinen Geometrie (Satz 1.6), der Satz von Pappos und der Satz von Desargues.

Einen projektiven Raum und seine Projektivitäten hatten wir kennengelernt. Die Menge  $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$  kann mit dem projektiven Raum  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$  identifiziert werden. Dann werden die gebrochen linearen Abbildungen zu den Projektivitäten des  $\mathbb{P}(\mathbb{C}^2)$ . Das Doppelverhältnis ist ein wichtiges Datum der projektiven Geometrie.

## 5 Hyperbolische Geometrie: [AF15, Kap 3]

Aus [AF15, Kap 3] folgendes:

- 3.1: Daraus nur einige historische Bemerkungen.
- 3.2: ganz.
- 3.3: ganz.
- 3.4: Nur die Sätze 17 und 18. Nicht die Sätze 14, 15 und 16.
- 3.5: Nur bis kurz vor Satz 22.

## 6 Kegelschnitte

Dieses Kapitel ergänzt die Teile des Abschnitts 1.4 im Buch [AF15], die im Rahmen dieser Vorlesung behandelt werden, das sind die Abschnitte 1.4.2, 1.4.3 und 1.4.4. bis Satz 53 (den nicht mehr). Abschnitt 1.4.1 wird durch das Kapitel hier (mehr als) ersetzt, alles ab Satz 53 wird nicht behandelt (also auch nicht die Abschnitte 1.4.5 und 1.4.6).

Kegelschnitte sind seit der Antike studiert worden. Sie verallgemeinern Kreise und Geraden in milder Weise und haben hübsche Eigenschaften, die unten genannt werden. Dennoch sind sie aus meiner Sicht überbewertet, und diese Überbewertung ist der langen Tradition geschuldet, in der ihre Lehre steht.

Kegelschnitte haben mindestens 3 interessante Aspekte.

- (A) Ihre Klassifikation. Sie lassen sich durch Gleichungen in  $(x, y)$  mit quadratischen, linearen und konstanten Termen charakterisieren und in Normalformen bringen. Sie umfassen 6 von 8 Typen von *ebenen euklidischen Quadriken*, mit 2 oder 1 oder 0 Parametern. Typen mit 2 bzw 1 Parametern können in Typen mit 1 oder 0 bzw 0 Parametern entarten.
- (B) Sie sind als Schnitte von (euklidischen) Ebenen mit einem Kegel  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - r \cdot z^2 = 0\}$  mit  $r \in \mathbb{R}_{>0}$  realisierbar, d.h. sie sind *Kegelschnitte*.
- (C) Sie haben *Brennpunkte* und *Leitgeraden* mit im allgemeinen 3 Arten von ästhetischen Eigenschaften.

In [AF15] wird (A) nur implizit via einige Rechnungen gestreift und nicht deutlich behandelt. [AF15] startet in 1.4.1 mit (B), hat aber eine etwas andere Auffassung dabei als ich und macht Rechnungen, die ich nicht so attraktiv finde. Unten fange ich mit (A) an. Das wird durch [AF15, 1.4.2] ergänzt. Zu (B) kommen unten nur einige Bemerkungen. Bilder und Anschauung zu (B) sind wichtig, Rechnungen nicht so. Für (C) verweise ich auf die Abschnitte 1.4.3 und 1.4.4 in [AF15] (nur bis Satz 53, ohne ihn) und auf ein Aufgabenblatt.

### (A) Ebene euklidische Quadriken.

**Definition 6.1** (a) Eine ebene euklidische Quadrik ist die Nullstellenmenge im  $\mathbb{R}^2$  mit den Koordinaten  $(x_1, x_2)$  einer Gleichung

$$f(x_1, x_2) := \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} \cdot x_i x_j + \sum_{i=1}^2 b_i \cdot x_i + c = 0$$

mit  $a_{ij}, b_i, c \in \mathbb{R}$  und nicht allen  $a_{ij}, b_i$  gleich 0. Es wird oBdA  $a_{21} = a_{12}$  angesetzt. Solche Gleichungen werden quadratisch genannt, falls nicht alle  $a_{ij}$  gleich 0 sind, und linear sonst.

(b) Zwei ebene euklidische Quadriken sind kongruent, falls es eine Isometrie  $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  gibt, die die eine in die andere überführt.

In Büchern zur linearen Algebra und (analytischen) Geometrie findet man häufig Kapitel über affine Quadriken im  $\mathbb{R}^n$ . Die sind einerseits allgemeiner ( $\mathbb{R}^n$  statt  $\mathbb{R}^2$ ), andererseits meint das *affin* eine Klassifikation bis auf bijektive affine Abbildungen des  $\mathbb{R}^n$  auf sich, und das ist gröber als der Kongruenzbegriff oben. Für die Kegelschnitte reicht die Beschränkung auf  $\mathbb{R}^2$ , für sie ist aber der Kongruenzbegriff nötig und die affine Klassifikation zu grob.

**Theorem 6.2** (a) *Es gibt 8 Typen von ebenen euklidischen Quadriken. Die Menge der Kongruenzklassen eines Typs hat 2 oder 1 oder 0 Parameter. Man kann jeweils Normalformen angeben.*

(1) *Ellipsen: 2 Parameter, 1 Familie von Normalformen hat die Parameter  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$  mit  $a \geq b$ , sie ist*

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Eine Ellipse ist eine geschlossene Kurve.*

(2) *Hyperbeln: 2 Parameter, 1 Familie von Normalformen hat die Parameter  $a, b \in \mathbb{R}_{>0}$ , sie ist*

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

*Eine Hyperbel besteht aus 2 Teilen, die jeweils offene Kurven sind.*

(3) *Parabeln: 1 Parameter, 1 Familie von Normalformen hat den Parameter  $p \in \mathbb{R}_{>0}$ , sie ist*

$$y^2 - 2px = 0.$$

*Eine Parabel ist eine offene Kurve.*

(4) *2 nicht parallele Geraden: 1 Parameter (= ein Winkel) 1 Familie von Normalformen hat den Parameter  $\varepsilon \in \mathbb{R}_{>1}$ , sie ist*

$$y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 = 0.$$

(5) *2 parallele Geraden: 1 Parameter (= der Abstand), 1 Familie von Normalformen hat den Parameter  $c \in \mathbb{R}_{>0}$ , sie ist*

$$y(y - c) = 0.$$

(6) *Eine doppelte Gerade: 0 Parameter, 1 Normalform ist*

$$y^2 = 0.$$



(7) Ein Punkt: 0 Parameter, 1 Normalform ist

$$x^2 + y^2 = 0.$$

(8) Die leere Menge: 0 Parameter, 1 Normalform ist

$$x^2 + y^2 = -1.$$

(b) Bemerkung: Die Familien (5), (6), (7) und (8) sind nicht so interessant, aber sie gehören ins Gesamtbild.

(c) Es gibt eine gemeinsame Normalform für aller nichtleeren ebenen euklidischen Quadriken außer 2 parallelen Geraden, d.h. für die Kongruenzklassen der Typen (1), (2), (3), (4), (6), (7). Sie hat die 2 Parameter  $\varepsilon \in \mathbb{R}$  und  $p \in \mathbb{R}$ . Sie ist

$$Q_{\varepsilon,p} := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2p\varepsilon x - p^2 = 0\}.$$

Der Parameter  $\varepsilon$  heißt Exzentrizität, der Parameter  $p$  heißt Parameter.

Zwei Quadriken  $Q_{\varepsilon_1,p_1}$  und  $Q_{\varepsilon_2,p_2}$  sind genau dann kongruent, wenn es Vorzeichen  $\delta_1, \delta_2 \in \{\pm 1\}$  mit  $(\varepsilon_2, p_2) = (\delta_1\varepsilon_1, \delta_2p_1)$  gibt, oder wenn im Fall von 2 Geraden (das ist der Fall  $\varepsilon^2 > 1, p = 0$ )  $1 - \varepsilon_2^2 = (1 - \varepsilon_1^2)^{-1}$  gilt, oder im Fall eines Punktes (das ist der Fall  $\varepsilon^2 < 1, p = 0$ ) bei beliebigen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ .

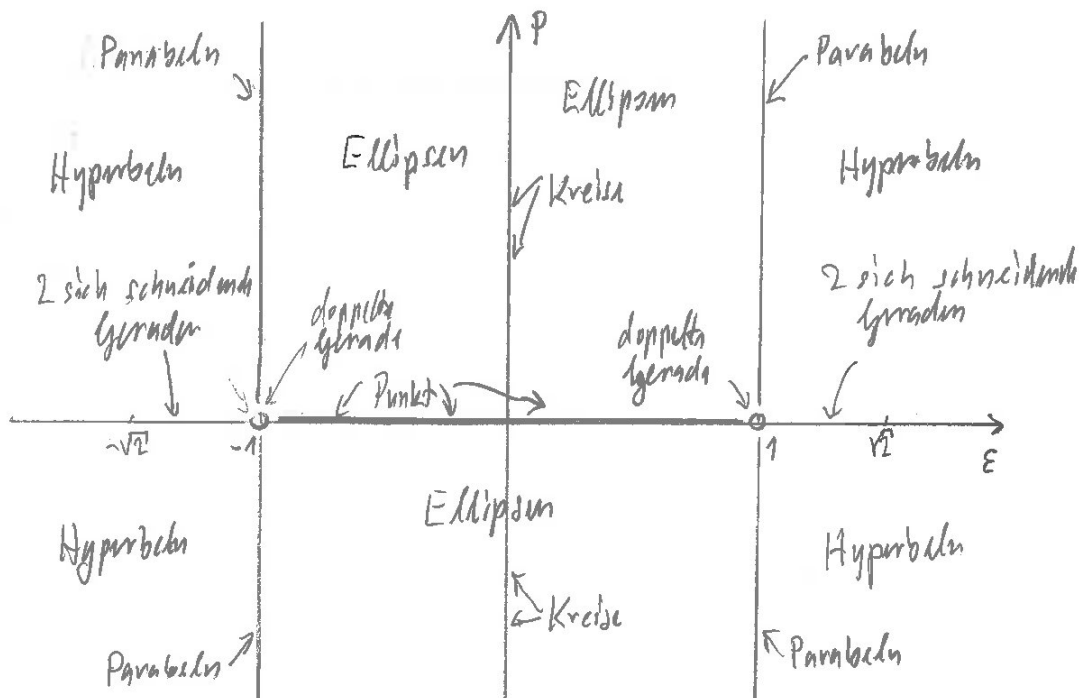
Zwei Quadriken sind genau dann ähnlich, wenn ihre Exzentrizitäten bis auf ein Vorzeichen übereinstimmen, oder wenn im Fall von 2 Geraden  $1 - \varepsilon_2^2 = (1 - \varepsilon_1^2)^{-1}$  gilt, oder im Fall eines Punktes (das ist der Fall  $\varepsilon^2 < 1, p = 0$ ) bei beliebigen  $\varepsilon_1$  und  $\varepsilon_2$ .

Daher sagt die Exzentrizität  $\varepsilon$  etwas über die Form einer Quadrik. Der Parameter  $p$  sagt etwas über die Größe der Quadrik.

(d) Das folgende Bild gibt den Atlas der Quadriken in der Ebene  $\mathbb{R}^2$  mit den Parametern  $(\varepsilon, p)$ . Es zeigt auch, welche Typen in welche Typen entarten können:

$$(1) \Rightarrow (3)\&(5)\&(6)\&(7), \quad (2) \Rightarrow (3)\&(4)\&(5), \quad (3) \Rightarrow (5), \quad (4) \Rightarrow (5).$$

ATLAS DER QUADRIKEN



- (1) Ellipsen:  $\varepsilon^2 < 1, p \neq 0$ . Spezialfall Kreise:  $\varepsilon = 0$ .
- (2) Hyperbeln:  $\varepsilon^2 > 1, p \neq 0$ .
- (3) Parabeln:  $\varepsilon = \pm 1, p \neq 0$ .
- (4) 2 Geraden:  $\varepsilon^2 > 1, p = 0$ .
- (6) Eine doppelte Gerade:  $\varepsilon = \pm 1, p = 0$ .
- (7) Ein Punkt:  $\varepsilon^2 < 1, p = 0$ .

**Bemerkungen 6.3** (i) Der Typ (7), der Punkt, hat hier einen Parameter  $\varepsilon$  und kann mit diesem zum Typen (6), der doppelten Geraden, entarten. Aber dieser Parameter betrifft nur die quadratische Gleichung, nicht das geometrische Objekt, den Punkt. Die Kongruenzklassen aller anderen Typen (außer Typ (5)) haben nur 4 oder 2 Repräsentanten in der Normalform in (c).

(ii) In [AF15, 2.4.2] werden bei den Ellipsen und Hyperbeln die Normalformen in (a) und (c) verbunden. Bei den Parabeln muß man nur  $x$  durch  $-\varepsilon x + \frac{p}{2}$  ersetzen. Bei den 2 nicht parallelen Geraden und der doppelten Geraden stimmen die Normalformen in (a) und (c) überein. Bei den 2 parallelen Geraden gibt (c) keine Normalform.

(iii) Wie kann man die gemeinsame Familie in (c) für die Typen (1), (2), (3), (4), (6) und (7) erweitern, so dass sie auch den Typen (5) erfaßt? Tatsächlich stecken in den Punkten

$(\varepsilon, p) = (\pm 1, 0)$  die für den Typen (6) einer doppelten Geraden stehen, auch die parallelen Geraden. Das sieht man, wenn man eine Familie von Ellipsen mit  $a \rightarrow +\infty$  und  $b = \text{const}$  betrachtet. Sie läuft in den Fall von 2 parallelen Geraden mit Abstand  $b$ . Man muß in der  $(\varepsilon, p)$ -Ebene die beiden Punkte  $(\pm 1, 0)$  aufblasen, d.h. durch Kurven des Typs  $S^1$  ersetzen, wo fast jeder Punkt auf der  $S^1$  für eine Kurve mit  $a \rightarrow +\infty$  und  $b = \text{const}$  steht (und das in  $(\varepsilon, p)$  umgerechnet werden muß), entlang der man in den Punkt  $(\pm 1, 0)$  läuft. Das geht tatsächlich und gibt wieder eine glatte Fläche. Allerdings braucht man für ihre Beschreibung mehrere Koordinatensysteme. Das geht in die (reell) algebraische Geometrie hinein und gehört nicht in diese Vorlesung.

**Beweisskizze zu Theorem 6.2:** Es wird nur eine grobe Beweisskizze gegeben.

Zuerst eine Heuristik: Bei den Gleichungen für die Quadriken hat man  $3 + 2 + 1 = 6$  Parameter (von den  $a_{ij}$  nur 3 wegen  $a_{21} = a_{12}$ ). Die Gruppe der Isometrien des  $\mathbb{R}^2$  hat 3 Parameter. Das Reskalieren einer Gleichung gibt einen weiteren Parameter. Daher sind bei den Kongruenzklassen der Quadriken  $6 - 3 - 1 = 2$  Parameter zu erwarten.

(a) Zuerst wird die symmetrische reelle Matrix  $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$  der Koeffizienten des quadratischen Teils einer quadratischen Gleichung  $f = 0$  betrachtet. Sie ist halbeinfach mit reellen Eigenwerten  $\lambda_1, \lambda_2$ , und es existieren orthogonale Eigenvektoren. Mit einem orthogonalen Automorphismus  $\varphi$  des  $\mathbb{R}^2$  kann man sie in Diagonalgestalt überführen. Dann ist auch der quadratische Teil von  $f \circ \varphi$  in *Diagonalgestalt*, d.h. von der Gestalt

$$\lambda_1 \cdot x^2 + \lambda_2 \cdot y^2.$$

Im elliptischen Fall ( $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ ) und im hyperbolischen Fall und im Fall von 2 nicht parallelen Geraden (beide  $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ ) kann man durch Translationen in  $x$  und  $y$  die linearen Teile in  $f \circ \varphi$  wegbekommen. Danach ist man durch Reskalieren schnell bei den Normalformen. Im Fall von 2 nicht parallelen Geraden ist nach den Translationen auch der konstante Teil weg, im hyperbolischen Fall nicht.

Die Normalformen der anderen Typen (parabolisch und 2 parallele Geraden: entweder  $\lambda_1 = 0$  oder  $\lambda_2 = 0$ ; alle anderen Typen:  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ ) erhält man auch leicht.

(c) Mit etwas Mühe (ein Teil steht in [AF15, 2.4.2]) erhält man aus den Normalformen in (a) die Normalformen in (c) (natürlich außer bei den Typen (5) und (8)).

Wenn man in der Normalform  $y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2px - p^2$ , in (c)  $(x, y)$  durch  $(rx, ry)$  mit einem  $r > 0$  ersetzt und das so erhaltene Polynom  $(ry)^2 + (1 - \varepsilon^2)(rx)^2 + 2p(rx) - p^2$  mit  $r^{-2}$  multipliziert und so wieder in die Normalform bringt, so erhält man die Normalform

$$y^2 + (1 - \varepsilon^2)x^2 + 2(pr^{-1})x - (pr^{-1})^2,$$

und das ist die Normalform für eine ähnliche Quadrik. Man sieht, dass sich  $p$  ändert, aber  $\varepsilon$  nicht.

Die Beweise der weiteren Aussagen in (c) und aller Aussagen in (d) werden hier nicht durchexerziert. □

**(B) Kegelschnitte:** Da der Kegel  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - r \cdot z^2 = 0$  (für ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ) durch eine quadratische Gleichung in  $x, y, z$  gegeben ist, sind auch seine Schnitte mit Ebenen im  $\mathbb{R}^3$  bezüglich irgendwelcher (am besten euklidischer) Koordinaten dieser Ebenen durch quadratische Gleichungen gegeben. Sie sind also ebene euklidische Quadriken.

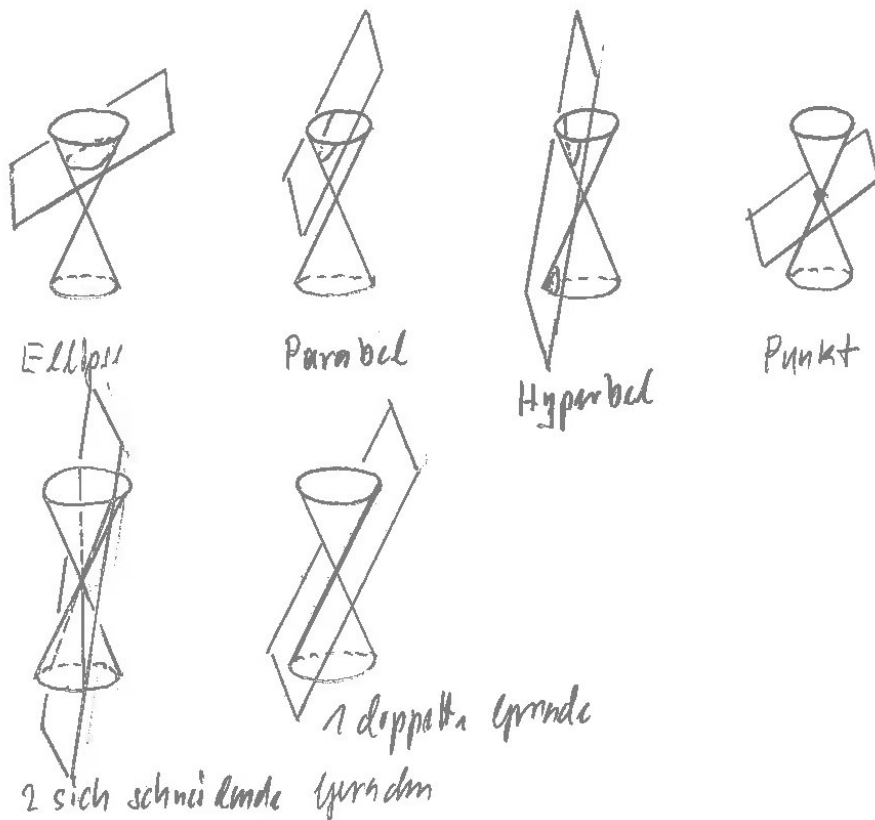
Man kann sich im Kopf oder mit Skizzen Schnitte eines Kegels mit vielen Ebenen vor Augen führen und sich so überzeugen, dass alle ebenen euklidischen Quadriken außer der leeren Menge und außer den 2 parallelen Geraden als Kegelschnitte realisierbar sind. Man sollte das einmal tun und die Erfahrung nicht mehr vergessen. Man versteht dann das folgende Theorem.

**Theorem 6.4** (a) Jede ebene euklidische Quadrik außer der leeren Menge und außer den 2 parallelen Geraden ist als Schnitt einer Ebene mit einem Kegel  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - r \cdot z^2 = 0$  (für ein  $r \in \mathbb{R}_{>0}$ ) realisierbar.

(b) Für  $r = 1$  wird der Kegel Standard-Kegel genannt.

Jede ebene Quadrik außer der leeren Menge und außer den 2 parallelen Geraden und außer den Hyperbeln mit  $|\varepsilon| > \sqrt{2}$  ist als Schnitt einer Ebene mit dem Standard-Kegel realisierbar.

#### BILDER ZU KEGELSCHNITTEN



Es ist natürlich auch legitim, aber mühsamer und weniger attraktiv, mit Rechnungen nachzuweisen, dass alle ebenen euklidischen Quadriken außer der leeren Menge und außer den 2 parallelen Geraden als Kegelschnitte auftreten. [AF15, 1.4.1] geht in diese Richtung. Allerdings wird dort im Gegensatz zu hier nicht der Schnitt eines Kegels mit einer Ebene als Kegelschnitt aufgefaßt, sondern die Projektion dieses Schnitts auf die  $(x, y)$ -Ebene. Das

finde ich unnatürlich. (Es erfordert auch, dass die schneidende Ebene nicht orthogonal zur  $(x, y)$ -Ebene ist.)

**(C) Brennpunkte und Leitgeraden:** Die werden in [AF15, 1.4.3 und ein Teil von 1.4.4] und in einem Aufgabenblatt behandelt.

- (i) Die erste der 3 ästhetischen Eigenschaften ist, dass es bei Ellipsen, Hyperbeln und Parabeln ein Paar oder mehrere Paare  $(F, G)$  von Brennpunkten  $F$  und Leitgeraden  $G$  mit der Eigenschaft

$$\text{Quadrik} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{d(P, F)}{d(P, G)} = \varepsilon\}$$

gibt ( $d(., .)$  ist der Abstand und  $\varepsilon$  ist die Exzentrizität).

- (ii) Die zweite ist, dass bei den Typen, die mehrere Brennpunkte haben (Ellipsen  $\neq$  Kreise, Hyperbeln)

$$\text{Quadrik} = \{P \in \mathbb{R}^2 \mid |d(P, F_1) \pm d(P, F_2)| = 2a\}$$

gilt.

- (iii) Die dritte ist, dass bei der Ellipse

$$\text{Eintrittswinkel} = \text{Austrittswinkel}$$

gilt, d.h. dass ein Lichtstrahl, der in  $F_1$  startet und an der Ellipse reflektiert wird, durch  $F_2$  läuft. Bei einigen anderen Typen gelten analoge Eigenschaften (siehe ein Aufgabenblatt). Wegen dieser Eigenschaft spricht man überhaupt von *Brennpunkten*.