Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(3 Punkte)* Sei $\mathcal{K}$ ein Kreis in $\mathbb{C}$ mit Mittelpunkt M und $S_\mathcal{K}$ die Inversion am Kreis $\mathcal{K}$. Im folgenden sind $M_1, ..., M_6$ Mengen von verallgemeinerten Kreisen in $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, die durch $S_\mathcal{K}$ aufeinander abgebildet werden. $\mathrm{Int}\,(L)$ bezeichnet bei einem *echten* Kreis L das Innere des Kreises.

$$\begin{aligned}
M_1 &:= \{\text{Kreise } L \text{ mit } L \subset \mathrm{Int}\,(\mathcal{K})\}, \\
M_2 &:= \{\text{verallgemeinerte Kreise } L \text{ mit } L \cap (\mathrm{Int}\,(\mathcal{K}) \cup \mathcal{K}) = \emptyset\}, \\
M_3 &:= \{\text{Kreise } L \text{ mit } M \in \mathrm{Int}\,(L)\}, \\
M_4 &:= \{\text{Kreise } L \text{ mit } M \notin \mathrm{Int}\,(L)\} \cup \{\text{alle Geraden}\}, \\
M_5 &:= \{\text{verallgemeinerte Kreise } L \text{ mit } M \in L\}, \\
M_6 &:= \{\text{alle Geraden}\}.
\end{aligned}$$

Füllen Sie die zweite Zeile der folgenden Tabelle aus. Begründungen sind nicht nötig.

M_i	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6
M_j mit $M_j = S_\mathcal{K}(M_i)$						

2. *(1+2+2+1+2 Punkte)* Die Menge der Punkte der *hyperbolischen Ebene* ist im *Poincaré-Modell*

$$\mathbb{H}^2 := \{z \in \mathbb{C} \,|\, \Im(z) > 0\}.$$

   (a) Welche Kurven in $\mathbb{H}^2$ sind die *hyperbolischen Geraden*?

   (b) Seien $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ mit $z_1 \neq z_2$. Wie ist der hyperbolische Abstand $d_\mathbb{H}(z_1, z_2) \in \mathbb{R}_{>0}$ zwischen z_1 und z_2 definiert?

   (c) Wie groß ist der Abstand $d_\mathbb{H}(i, t \cdot i)$ für ein $t \in \mathbb{R}_{>0}$?

   (d) Geben Sie die Formel an, die bei einem hyperbolischen Dreieck Δ seine Fläche und die Summe der Innenwinkel verbindet.

   (e) Machen Sie 2 Skizzen eines Kreises, der der Rand des Scheibenmodells der hyperbolischen Ebene sein soll. Tragen Sie in einer Skizze ein (echtes) hyperbolisches Dreieck Δ_1 (echt: alle Innenwinkel > 0) und die 3 hyperbolischen Geraden ein, von denen seine Seiten Stücke sind. Tragen Sie in der zweiten Skizze ein asymptotisches Dreieck Δ_2 mit Innenwinkeln $\alpha = 0, \beta > 0, \gamma > 0$ und die 3 hyperbolischen Geraden ein, von denen seine Seiten Stücke sind.

3. *(2 Punkte)* Sei $r \in \mathbb{R}_{>0}$. Berechnen Sie für den hyperbolischen Kreis mit hyperbolischem Radius r und hyperbolischem Mittelpunkt $z_0 = i \in \mathbb{H}^2$ (also im Poincaré-Modell) den euklidischen Radius R und den euklidischen Mittelpunkt M.

Bemerkung: Die Lösung erfordert die Lösung von Aufgabe 2 (c) und ist dann einfach.

Bitte wenden !!!

4. *(2 Punkte)* Machen Sie eine Skizze, die folgendes enthält: den Rand S^1 des Scheibenmodells der hyperbolischen Ebene; eine hyperbolische Gerade G; einen Punkt $p \notin G$ in der Scheibe; die Familie der zu G parallelen hyperbolischen Geraden durch p (diese Familie können Sie natürlich nur andeuten).

5. *(4 Punkte)* Sei $\gamma : [a, b] \to \mathbb{H}^2 \subset \mathbb{C}$ eine C^∞-Kurve in der hyperbolischen Ebene. Ihre Länge ist
$$L(\gamma) = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\Im(\gamma(t))}\, dt.$$
Diese Formel brauchen Sie hier nicht zu beweisen.

   γ ist eine *Geodätische* von $z_1 := \gamma(a)$ nach $z_2 := \gamma(b)$, falls sie unter allen Kurven von z_1 nach z_2 kürzeste Länge hat.

   Im Fall von $z_1 = i, z_2 = r \cdot i$ für ein $r \in \mathbb{R}_{>1}$ folgt aus der Formel oben relativ leicht, dass genau die Kurven γ von z_1 nach z_2 mit
$$\begin{aligned} \Re(\gamma)(t) &= 0 \;\forall\, t, \text{ also } \mathrm{Bild}(\gamma) = \text{ Strecke von } i \text{ nach } r \cdot i \\ \text{und } \Im(\gamma)'(t) &> 0 \;\forall\, t \end{aligned}$$
die kürzest mögliche Länge $\log(r)$ haben. Also ist die *Geodätische* von i nach $r \cdot i$ die Strecke von i nach $r \cdot i$, mit irgendeiner Parametrisierung γ mit $\Im(\gamma)'(t) > 0 \;\forall\, t$.

   Leiten Sie daraus und aus Eigenschaften der Gruppe $PSL(2, \mathbb{R})$ der gebrochen linearen Transformationen, die $\mathbb{H}^2$ auf $\mathbb{H}^2$ abbilden, ab, dass für beliebige Punkte $z_1, z_2 \in \mathbb{H}^2$ mit $z_1 \neq z_2$ die *Geodätische* von z_1 nach z_2 das Kurvenstück zwischen z_1 und z_2 der (eindeutigen) hyperbolischen Geraden durch z_1 und z_2 ist.

6. *(4 Punkte)* (Hyperbolische Kreise) Sowohl im Poincaré-Modell als auch im Scheibenmodell ist ein *hyperbolischer Kreis* um einen Punkt z_0 die Menge aller Punkte der hyperbolischen Ebene, die einen festen hyperbolischen Abstand $r \in \mathbb{R}_{>0}$ zu z_0 haben.

   Aus der Symmetrie des Scheibenmodells folgt leicht, dass im Scheibenmodell die hyperbolischen Kreise um den Nullpunkt $z_0 = 0$ genau die euklidischen Kreise mit Mittelpunkt 0 und Radius $R < 1$ sind (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

   Leiten Sie daraus und aus Eigenschaften der gebrochen linearen Transformationen ab, dass sowohl im Poincaré-Modell als auch im Scheibenmodell alle hyperbolischen Kreise euklidische Kreise sind (allerdings stimmen der hyperbolische Mittelpunkt z_0 und der euklidische Mittelpunkt fast nie überein; sie stimmen nur im Scheibenmodell im Fall $z_0 = 0$ überein).

   Formulieren Sie dabei klar, welche Eigenschaften der gebrochen linearen Transformationen in $PSL(2, \mathbb{R})$ und welche Eigenschaften der Cayley-Transformation $C \in PSL(2, \mathbb{C})$, die das Scheibenmodell auf das Poincaré-Modell abbildet, gebraucht werden. (Die Cayley-Transformation müssen Sie nicht angeben.)

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 5 in der Übung am 03.05.2018