

Übungsaufgaben zur Geometrie

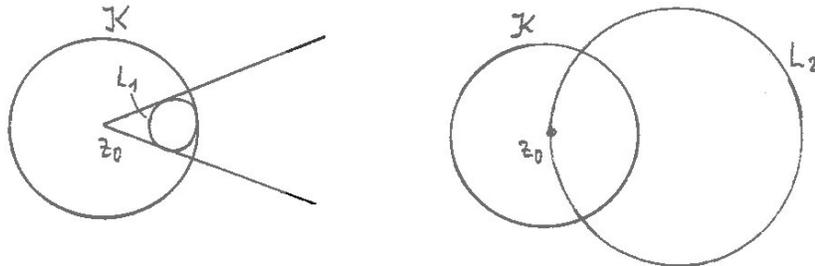
1. (1+2 Punkte)

- (a) Sei \mathcal{K} ein Kreis in \mathbb{C} mit Mittelpunkt z_0 und Radius r . Die Inversion $S_{\mathcal{K}} : \mathbb{C} - \{z_0\} \rightarrow \mathbb{C} - \{z_0\}$ am Kreis \mathcal{K} bildet jeden Punkt $z \in \mathbb{C} - \{z_0\}$ auf einen Punkt z^* ab. z^* ist dadurch bestimmt, dass z und z^* auf der gleichen Halbgeraden liegen, die in z_0 anfängt, und dass sie eine bestimmte Gleichung erfüllen.

Geben Sie die Gleichung an.

- (b) Die folgenden beiden Skizzen zeigen jeweils \mathcal{K} und einen zweiten Kreis L_1 bzw. L_2 . Die erste Skizze zeigt auch 2 Halbgeraden.

Kopieren Sie die Skizzen auf ein Lösungsblatt und tragen Sie die (oder aussagekräftige Teile von ihnen) verallgemeinerten Kreise $S_{\mathcal{K}}(L_1)$ bzw. $S_{\mathcal{K}}(L_2)$ ein.



2. (2+5+2 Punkte) Ein *Polytop* ist ein Durchschnitt im \mathbb{R}^3 von endlich vielen Halbräumen, sofern dieser Durchschnitt beschränkt ist. Dann ist

$e :=$ die Anzahl der Ecken des Polytops,

für $s \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ $e_s :=$ die Anzahl der Ecken des Polytops, von denen s Kanten ausgehen,

$k :=$ die Anzahl der Kanten des Polytops,

$f :=$ die Anzahl der Polygonflächen des Polytops,

für $t \in \mathbb{N}_{\geq 3}$ $f_t :=$ die Anzahl der Polygonflächen des Polytops, die t Ecken haben.

- (a) Formulieren Sie 3 Formeln (ohne Beweise): die Eulersche Polyederformel; eine Formel, die k und das Tupel $(e_s)_{s \geq 3}$ verbindet; eine Formel, die k und das Tupel $(f_t)_{t \geq 3}$ verbindet.
- (b) Die 5 platonischen Körper sind seit über 2000 Jahren bekannt. Jeder sollte sie kennen. Füllen Sie die folgende Tabelle aus. Es gibt jeweils nur ein s mit $e_s \neq 0$ und nur ein t mit $f_t \neq 0$.

s mit $e_s \neq 0$	t mit $f_t \neq 0$	$e = e_s$	k	$f = f_t$	
					Tetraeder
					Würfel = Hexaeder
					Oktaeder
					Dodekaeder
					Ikosaeder

(c) Aus dem Ikosaeder erhält man durch geeignetes Abschneiden von Umgebungen der Ecken das *abgestumpfte Ikosaeder*, ein *archimedisches Polytop*, dessen Polygonflächen regelmäßige Fünfecke und Sechsecke sind. Geben Sie f_5, f_6, k und alle s und e_s mit $e_s \neq 0$ an.

3. (3+3 Punkte) Hier wird der \mathbb{R}^3 mit dem Spaltenvektorraum $M(3 \times 1, \mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(3 \times 3, \mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf \mathbb{R}^3 . Dann ist

$$SO(3) = \{A \in SL(3, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\}$$

die Gruppe der Drehungen des \mathbb{R}^3 mit Drehachsen durch 0. Außer bei $\text{id} = \mathbf{1}_3$ sind die Drehachsen genau die Eigenräume mit Eigenwert 1 der Drehungen.

Die 5 Platonischen Körper werden so in den \mathbb{R}^3 eingebettet, dass ihr Mittelpunkt der Nullpunkt ist. Dann ist für jeden Platonischen Körper die Gruppe der Drehungen, die ihn auf sich abbilden (d.h. die ihn *invariant* lassen), eine endliche Untergruppe von $SO(3)$.

Die folgende Tabelle gibt Informationen über die (endliche) Gruppe \mathcal{O} der „orientierungserhaltenden Symmetrien“ des Würfels, d.h. der Elemente von $SO(3)$, die einen Würfel im \mathbb{R}^3 mit Mittelpunkt in 0 auf sich abbilden.

$X :=$ Anzahl der Drehachsen eines Typs,

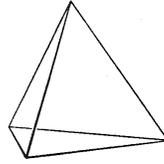
$Y :=$ Anzahl der Drehungen um Drehachsen eines Typs,

X	Typ der Drehachsen	Drehwinkel	Y
–	–	0	(id :) 1
3	durch gegenüberliegende Flächenmittelpunkte	$\frac{1}{2}\pi, \pi, \frac{3}{2}\pi$	$3 \cdot 3 = 9$
6	durch gegenüberliegende Kantenmittelpunkte	π	6
4	durch gegenüberliegende Ecken	$\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi$	$4 \cdot 2 = 8$

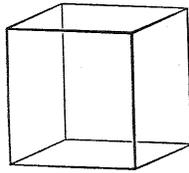
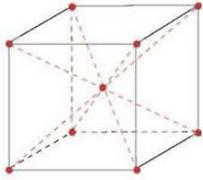
$$\Rightarrow |\mathcal{O}| = 1 + 9 + 6 + 8 = 24.$$

(a) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe \mathcal{T} der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Tetraeders und bestimmen Sie $|\mathcal{T}|$.

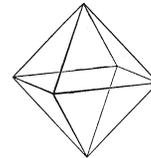
(b) Machen Sie eine analoge Tabelle für die Gruppe \mathcal{I} der orientierungserhaltenden Symmetrien eines Dodekaeders und bestimmen Sie $|\mathcal{I}|$.



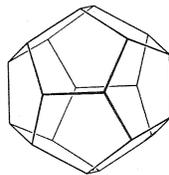
Tetraeder



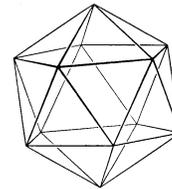
Würfel



Oktaeder



Dodekaeder



Ikosaeder

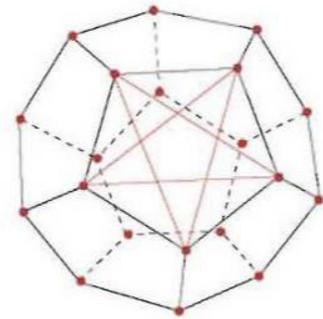
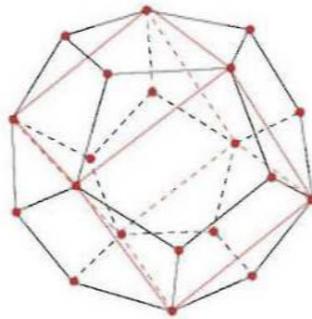
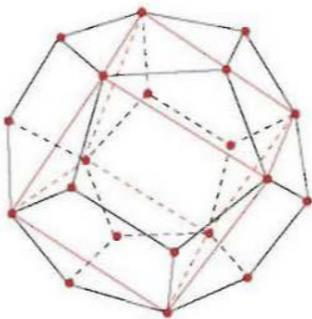
Bemerkung: Es gilt

$$\mathcal{T} \cong A_4, \quad \mathcal{O} \cong S_4, \quad \mathcal{I} \cong A_5.$$

Bei \mathcal{T} werden die 4 Ecken permutiert. Man überprüft leicht, dass die Drehungen genau die geraden Permutationen geben.

Bei \mathcal{O} muß man die Operation auf den 4 Raumdiagonalen im Würfel ansehen. Jedes Element von \mathcal{O} permutiert diese. Wegen $|\mathcal{O}| = 24 = |S_4|$ wird jede Permutation als Drehung realisiert.

Bei \mathcal{I} muß man zuerst einmal wissen und verstehen, dass es im Dodekaeder genau 5 regelmäßige Würfel gibt, deren Ecken Ecken des Platonischen Körpers sind. Diese werden durch die Drehungen in \mathcal{I} permutiert. Es erfordert aber noch Anstrengung zu sehen, dass genau die geraden Permutationen realisiert werden.



4. (3+3 Punkte) Hier wird der \mathbb{R}^2 mit dem Spaltenvektorraum $M(2 \times 1, \mathbb{R})$ identifiziert. Dann operieren Matrizen in $M(2 \times 2, \mathbb{R})$ durch Linksmultiplikation auf \mathbb{R}^2 . Dann ist

$$SO(2) = \{A \in SL(2, \mathbb{R}) \mid A^t = A^{-1}\} = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\}$$

die Gruppe der Drehungen d_α um Winkel $\alpha \in [0, 2\pi)$ und mit Mittelpunkt 0. Und die Gruppe

$$\begin{aligned} O(2) &= SO(2) \cup SO(2) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= SO(2) \cup \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ \sin \alpha & -\cos \alpha \end{pmatrix} \mid \alpha \in [0, 2\pi) \right\} \stackrel{\text{(als Menge)}}{\approx} S^1 \cup S^1 \end{aligned}$$

enthält neben den Drehungen auch die Spiegelungen s_v an Geraden $\mathbb{R} \cdot v$ mit $v \in \mathbb{R}^2 - \{0\}$. Bei $O(2)$ parametrisiert die eine S^1 die Drehungswinkel der Drehungen, und die andere S^1 parametrisiert die Spiegelungsachsen der Spiegelungen.

Drehungen und Spiegelungen kommutieren nicht, sondern es gilt die Beziehung

$$d_\alpha \circ s_v \circ d_\alpha^{-1} = s_{d_\alpha(v)}.$$

- (a) Beweisen Sie diese Formel und machen Sie eine Skizze dazu.
 (b) Vervollständigen Sie (ohne Beweis) die folgende Tabelle zur Gruppenstruktur von $O(2)$. Der Winkel zwischen w und v soll γ genannt werden (also ist $-\gamma$ der Winkel zwischen v und w).

\circ	d_β	s_w
d_α	$d_\alpha \circ d_\beta = d_{\alpha+\beta}$	$d_\alpha \circ s_w = s_{\dots}$
s_v	$s_v \circ d_\beta = s_{\dots}$	$s_v \circ s_w = d_{\dots}$