Universität Mannheim, Lehrstuhl für Mathematik VI
Prof. Dr. Claus Hertling, Falko Gauß

Blatt 1
15.02.2018

Übungsaufgaben zur Geometrie

1. *(1+1+1 Punkte)*
   (a) Geben Sie die Definition eines affinen Raums an.
   (b) Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ zwei affine Räume. Geben Sie die Definition einer affinen Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ an.
   (c) Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum, und seien $p_0, ..., p_n \in \mathcal{A}$ Punkte des affinen Raums. Geben Sie ein Kriterium dafür an, dass die Punkte eine *affine Basis* bilden.

2. *(3 Punkte)* Beweisen Sie folgenden Satz:

   Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum mit Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$, und seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ affine Unterräume mit $\mathcal{A}_1 \cap \mathcal{A}_2 \neq \emptyset$. Dann ist

   $$\mathcal{A}_1 \vee \mathcal{A}_2 = \bigcup_{(a,b) \in \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2} a \vee b.$$

3. *(1+1+1 Punkte)* K^n ist in dieser Vorlesung der Spaltenvektorraum $M(n \times 1, K)$ (und nicht der Zeilenvektorraum $M(1 \times n, K)$). Eine affine Abbildung $f : K^n \to K^m$ hat die Gestalt

   $$f(x) = B \cdot x + b \quad \text{mit geeigneten } B \in M(m \times n, K),\ b \in K^m.$$

   (a) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} f(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{m+1}$ als Produkt einer geeigneten Matrix mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{n+1}$.
   (b) Sei $g : K^m \to K^l$ eine affine Abbildung mit $g(y) = C \cdot y + c$ mit $C \in M(l \times m, K),\ c \in K^l$. Dann ist auch $g \circ f : K^n \to K^l$ eine affine Abbildung. Berechnen Sie D und d, so dass $(g \circ f)(x) = D \cdot x + d$ ist.
   (c) Schreiben Sie $\begin{pmatrix} (g \circ f)(x) \\ 1 \end{pmatrix} \in K^{l+1}$ als Produkt von 2 geeigneten Matrizen mit $\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix}$.

4. *(2+2 Punkte)* Den Hauptsatz der affinen Geometrie kann man eleganter mit dem Begriff einer *semiaffinen Abbildung* fassen:

   Sei $\mathcal{A}$ ein affiner Raum mit $\dim \mathcal{A} \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$ und mit $|K| \geq 3$. Dann ist eine bijektive Abbildung $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ genau dann eine Kollineation, wenn sie semiaffin ist.

   Geben Sie zwei elegante Definitionen: Eine für eine *semilineare Abbildung* $f : V \to W$ zwischen zwei K-Vektorräumen, eine für eine *semiaffine Abbildung* $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ zwischen zwei affinen Räumen über dem gleichen Körper K.

Bitte wenden !!!

5. *(1+2 Punkte)* Geben Sie ein Beispiel mit $\dim \mathcal{A} = 1 \& |K| \geq 3$ und ein Beispiel mit $\dim \mathcal{A} \geq 2 \& |K| = 2$ an, so dass es bei beiden Beispielen mehr Kollineationen als semiaffine bijektive Abbildungen gibt.

Alle Informationen zur Vorlesung (Termine, Übungsblätter, Prüfungsmodalitäten, Literatur) sind unter

`http://mathe6.math.uni-mannheim.de/de/studium/fss-2018/geometrie/`

zu finden.

Vorrechnen von Musterlösungen zu Blatt 1 in der Übung am 22.02.2018