Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Stochastik I

13. Übung

1. Mehr zum schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{E}[X_n^2] < \infty, \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zeige

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k]) \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0.$$

(8 Punkte)

2. Limes superior und inferior von Mengenfolgen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Zeige:

a) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$. *(3 Punkte)*

b) $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^C = \limsup_{n\to\infty} A_n^C$. *(3 Punkte)*

c) $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$. *(3 Punkte)*

d) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$. *(3 Punkte)*

3. Kreativität ist gefragt.

a) Angenommen ihr habt einen Würfel, aber kennt die Wahrscheinlichkeiten für die einzelnen Seiten nicht. Wie kann man durch wiederholtes, unabhängiges Würfeln die einzelnen Wahrscheinlichkeiten bestimmen? *(4 Punkte)*

b) Abstrahiert den Gedanken aus a) und formuliert ein entsprechendes Theorem für eine diskrete Zufallsvariable X. *(4 Punkte)*

c) Was geht dabei für eine absolutstetige Zufallsvariable X schief? *(2 Punkte)*

Hinweis: Ihr könnt Euch von Vorlesung 27 inspirieren lassen.

Hier noch ein paar Zusatzaufgaben zur Zulassung und zur Wiederholung . ☺

4. Definitionen, Vorraussetzungen und Sätze

a) Was besagt der Hauptsatz über Dynkin-Systeme? *(2 Zusatzpunkte)*

b) Was sind die 4 Eigenschaften einer Verteilungsfunktion? *(2 Zusatzpunkte)*

c) Was besagt der abstrakte Transformationssatz? *(2 Zusatzpunkte)*

d) Gebe die Vorraussetzungen für den Satz von Fubini an. *(2 Zusatzpunkte)*

e) Was ist die Definition unabhängiger Zufallsvariablen? *(2 Zusatzpunkte)*

5. Erzeugte σ-Algebren und Dynkin-Systeme

a) Zeige, dass für beliebiges $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$

$$\sigma(d(\mathcal{E})) = d(\sigma(\mathcal{E}))$$

gilt. *(2 Zusatzpunkte)*

b) Zeige oder widerlege, dass für zwei Dynkin-Systeme $\mathcal{D}_1$ und $\mathcal{D}_2$ die Vereinigung $\mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$ ein Dynkin-System ist. *(2 Zusatzpunkte)*

c) Sei $f : \Omega \to \mathbb{R}$, wobei f nur die n unterschiedlichen Werte $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{R}$ annimmt. Gebe (mit Begründung) eine allg. Formel für $|\sigma(f)|$, also die Anzahl der Mengen in $\sigma(f)$, an. *(6 Zusatzpunkte)*

6. Aufgaben zum Lebesgue-Integral

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x \cdot \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$ und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto (-x^2 + 1) \cdot \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$.

a) Finde eine monoton wachsende Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$, sodass $f_n \uparrow f$ und skizziere f_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(2 Zusatzpunkte)*

b) Berechne $\int_0^1 f_n d\lambda$. *(2 Zusatzpunkte)*

c) Begründe, warum der Satz über monotone Konvergenz (für einfachen Funktionen) angewandt werden kann und zeige somit $\int_0^1 f d\lambda = \frac{1}{2}$. *(2 Zusatzpunkte)*

d) Finde eine monoton wachsende Folge von elementaren Funktionen $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathcal{E}^+$, sodass $g_n \uparrow g$ und skizziere g_n für $n \in \{1, 2, 3\}$. *(2 Zusatzpunkte)*

e) Berechne $\int_0^1 g_n d\lambda$. *(2 Zusatzpunkte)*

f) Begründe, warum der Satz über monotone Konvergenz (für einfachen Funktionen) angewandt werden kann und zeige somit $\int_{-1}^1 g d\lambda = \frac{4}{3}$. *(2 Zusatzpunkte)*

7. Es weihnachtet sehr. Nennt uns Eure Lieblingsverteilung! *(30 Zusatzpunkte)*

8. Erwartungswerte, Varianzen und Momente

a) Sei $X \sim \text{Poi}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$ und $a, b \in \mathbb{R}$. Berechne Erwartungswert und Varianz der Zufallsvariable $aX^2 + b$. *(5 Zusatzpunkte)*

b) Sei $Y \sim \text{Bin}(n, p)$ für $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Berechne die momenterzeugende Funktion und alle n-ten Momente von Y. *(5 Zusatzpunkte)*

c) Berechne die Varianz von $Z \sim \text{Pareto}(k, a)$ (siehe Sammlung von Verteilungen im Appendix des Skriptes) für $a > 0$ und $k > 2$. *(5 Zusatzpunkte)*

9. Aufgaben zu Transformationen und Faltungen Seien $X_1, X_2, Y_1, Y_2 \sim \mathcal{U}[0, 1]$ verteilt.

a) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $-X_2$. *(3 Zusatzpunkte)*

b) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $X_1 - X_2$. *(5 Zusatzpunkte)*

c) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $(X_1 - X_2)^2$. *(5 Zusatzpunkte)*

d) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2$. *(5 Zusatzpunkte)*

e) Berechne die Dichtefunktion der Zufallsvariable $\sqrt{(X_1 - X_2)^2 + (Y_1 - Y_2)^2}$. *(5 Zusatzpunkte)*

f) Seien $X, Y \sim \mathcal{U}[0, 1]^2$ verteilt. Berechne den Erwartungswert der Zufallsvariable $\|X - Y\|_2$. *(5 Zusatzpunkte)*

10. Noch mehr zum Schwachen Gesetz der großen Zahlen

Zeige, dass für die Annahme $X_1, X_2, ...$ paarweise unkorreliert und $\mathbb{V}(X_k) \leq c$ für alle $k \in \mathbb{N}, c \in \mathbb{R}^+$ ebenfalls die stochastische Konvergenz des schwachen Gesetz der großen Zahlen gilt.

(5 Zusatzpunkte)

11. Fast sichere Eindeutigkeit von Limites in Wahrscheinlichkeit.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen X, Y und die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ gegeben seien. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\{X + Y > \epsilon\} \subseteq \left\{X > \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{Y > \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

(5 Zusatzunkte)

b) Falls

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \quad \text{und} \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y,$$

gilt, folgt

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

(5 Zusatzpunkte)

12. Das starke Gesetz der großen Zahlen mit zweiten Momenten?

Was läuft beim Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen schief, wenn man ihn mit dritten Momenten durchführt (anstatt mit vierten)? *(10 Zusatzpunkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag, den 05. Januar 2021, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen. Ihr könnt Eure Lösungen natürlich schon früher abgeben. In diesem Falle seid ihr angehalten Eure Tutoren mit einer kurzen Mail zu benachrichtigen, damit diese schon früher anfangen können zu korrigieren.