Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Stochastik I

12. Übung

1. Summen Poisson-verteilter Zufallsvariablen.
Seien $X \sim \text{Poi}(\lambda)$, $Y \sim \text{Poi}(\beta)$ unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\lambda, \beta > 0$. Zeige, dass

$$X + Y \sim \text{Poi}(\lambda + \beta)$$

gilt.
Hinweis: Das kann man entweder mit Faltungen oder momenterzeugenden Funktionen machen (ihr dürft auch beides ausprobieren). *(3 Punkte)*

2. Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.
Es gilt folgende Aussage die für die Aufgabe nützlich ist: Sei $G\colon [0,\infty) \to (0,\infty)$ eine stetige Funktion mit

$$G(x+y) = G(x)G(y), \quad \forall x, y \geq 0,$$

so existiert ein $a \in \mathbb{R}$, sodass $G(x) = e^{ax}$ für alle $x \geq 0$ gilt.

Stellt euch nun vor, dass ihr eine Wartezeit mittels einer Zufallsvariable X modellieren wollt, die gedächtnislos ist (d.h. die Wartezeit vergisst dauernd, wie lange ihr schon wartet), stetig verteilt und nur Werte in $\mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ annehmen kann. Zeige, dass für X dann $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ für ein $\lambda > 0$ gelten muss. Mathematisch genau ausgedrückt, sollt ihr Folgendes zeigen: Sei X eine stetig verteilte Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$. Dann gilt

$$X \sim \text{Exp}(\lambda)$$

für ein $\lambda > 0$ genau dann, wenn X gedächtnislos ist, d.h.

$$\mathbb{P}(X \geq s + t | X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

(3 Punkte)

3. Weiteres zur Unabhängigkeit.

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Zeige, dass die paarweise Unabhängigkeit von $A_1, A_2, A_3 \in \mathcal{A}$ im Allgemeinen nicht die Unabhängigkeit von A_1, A_2, A_3 impliziert.
Hinweis: Ihr könnt (aber müsst nicht) das folgende Beispiel nutzen

$$\Omega = \{112, 121, 211, 222\}, \quad \mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega),$$
$$\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{4}, \quad \forall \omega \in \Omega,$$

und die Ereignisse $A_i := \{1 \text{ an } i\text{-ter Stelle}\}, i = 1, 2, 3.$ *(1 Punkt)*

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeige

i) Falls $\mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$ gilt, sind A und B unabhängig. *(1 Punkt)*

ii) Falls A und B unabhängig sind, so sind A^C und B unabhängig. *(1 Punkt)*

c) Seien X, Y, Z Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige, dass im Allgemeinen aus der paarweisen Unabhängigkeit von X, Y, Z nicht die Unabhängigkeit von X, Y, Z folgt. *(2 Punkte)*

4. Konvergenz von Zufallsvariablen

Sei $\alpha > 0$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit $X_1 = 1$ und

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}, \quad \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}, \quad \forall n \geq 2.$$

a) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ stochastisch gegen 1? *(3 Punkte)*

b) Sei $p \geq 1$. Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen 1? *(3 Punkte)*

c) Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen 1? *(3 Punkte)*

5. Noch mehr Konvergenz von Zufallsvariablen.

Sei $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Zufallsvariablen mit

$$X_n = (-1)^n X, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a) Zeige, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X konvergiert. *(3 Punkte)*

b) Zeige, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht stochastisch gegen X konvergiert. *(3 Punkte)*

c) Zeige, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht fast sicher gegen X konvergiert. *(3 Punkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 22. Dezember 2020, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.