Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Stochastik I

11. Übung

1. Summen von unabhängigen Exponentialverteilungen.

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige identisch verteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_{X_1} \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Berechne die Verteilung von $Z \coloneqq \sum_{k=1}^n X_k$.
Hinweis: Das Ergebnis ist

$$Z \sim \Gamma(n, \lambda),$$

wobei $\Gamma(n,\lambda)$ *die Gamma-Verteilung mit Parametern* n *und* λ *ist. Ihr könnt entweder Momenterzeugende Funktionen oder Faltung benutzen.*

(5 Punkte)

2. Unabhängigkeit und Unkorreliertheit.

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(Y = 1) = p \in (0,1), \quad \mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(Y = 0) = 1 - p.$$

a) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unkorreliert? *(4 Punkte)*

b) Sind die Zufallsvariablen $X + Y$ und $X - Y$ unabhängig? *(3 Punkte)*

Hinweis: Definition benutzen und Rechnen.

3. Unabhängig oder nicht?

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit gemeinsamer Dichte

$$f_{(X,Y)} \colon \mathbb{R}^2 \to [0,\infty), \quad (x,y)^T \mapsto \begin{cases} 2e^{-x-y}, & 0 < x < y < \infty, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Bestimme die Dichten der Randverteilungen von (X,Y). Sind X und Y unabhängig?

(8 Punkte)

4. Dichten von Zufallsvektoren.

Sei $X \sim \mathcal{U}([0,1])$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

a) Zeige, dass

$$A \coloneqq \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le 1, x = y\} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$$

gilt und, dass $\lambda^2(A) = 0$ gilt, wobei λ^2 das Lebesgue-Maß auf $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ bezeichnet.

(5 Punkte)

b) Folgere aus a), dass der Zufallsvektor (X, X) keine Dichte hat. *(3 Punkte)*

5. Exponentialverteilungen und Gleichverteilungen.

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}_X \sim \mathbb{P}_Y \sim \mathrm{Exp}(1)$. Zeige, dass $\frac{X}{X+Y}$, siehe Vorlesungsbeispiel, gleichverteilt auf dem Intervall $[0, 1]$ ist.

(7 Punkte)

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 15. Dezember 2020, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.