Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Stochastik I

10. Übung

1. Fubini.

Zeige, dass für eine Zufallsvariable $X \geq 0$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$$\mathbb{E}[X^r] = \int_0^\infty r t^{r-1} \mathbb{P}(X > t)\,\mathrm{d}t$$

für alle $r \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ gilt. *(4 Punkte)*

Hinweis: Fangt mit der rechten Seite an und schreibt die Wahrscheinlichkeit als Integral.

2. Jensen-Ungleichung.

Zeige, dass für eine Zufallsvariable X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $0 < s < t$ die Ungleichung

$$(\mathbb{E}[|X|^s])^{\frac{1}{s}} \leq (\mathbb{E}[|X|^t])^{\frac{1}{t}}$$

gilt. *(4 Punkte)*

Hinweis: Jensen-Ungleichung.

3. Mit dem Begriff der Verteilung experimentieren

a) Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ und $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine messbare Abbildung. Zeige, dass die Verteilung der Zufallsvariablen $f(X)$ der push-forward von $\mathbb{P}_X$ unter f ist. *(3 Punkte)*

b) Seien $X \sim \mathrm{Exp}(\beta)$ und $Y \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ verteilt für $\lambda, \beta > 0$. Finde eine messbare Funktion f, so dass $f(X) \sim Y$ ($f(X)$ und Y sollen also identisch verteilt sein). *(3 Punkte)*

4. Die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$.

Die Borelsche σ-Algebra auf $\mathbb{R}^d$ ist definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) := \sigma(\{B_1 \times \cdots \times B_d : B_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\, \forall k \in \{1, \ldots, d\}\}).$$

a) Zeige, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ sind:

i) $\mathcal{E}_1 := \{O \subset \mathbb{R}^d \mid O \text{ offen}\}$

ii) $\mathcal{E}_2 := \{(-\infty, t_1] \times ... \times (-\infty, t_d] \mid t_i \in \mathbb{R}\}$

iii) $\mathcal{E}_3 := \{(a_1, b_1] \times ... \times (a_d, b_d] \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$

(7 Punkte)

b) Zeige, dass falls $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist (d.h. $\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma(\mathcal{E})$), der eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ enthält, sodass $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \mathbb{R}$ gilt,

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) = \sigma(\{E_1 \times \cdots \times E_d : E_k \in \mathcal{E} \, \forall k \in \{1, \ldots, d\}\})$$

folgt.

(10 Zusatzpunkte)

5. Multivariate Dichtefunktionen.

Sei $f \colon \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ eine multivariate Dichtefunktion, das heißt:

i) f ist $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d) - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar,

ii) $f \geq 0$,

iii) $\int_{\mathbb{R}^d} f(x) \, \mathrm{d}x = 1$.

Zeige, dass

$$F \colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, \quad (t_1, \ldots, t_d)^T \mapsto F(t_1, \ldots, t_d) \coloneqq \int_{(-\infty,t_1]\times(-\infty,t_2]\times\cdots\times(-\infty,t_d]} f(x) \, \mathrm{d}x$$

eine multivariate Verteilungsfunktion definiert.

Hinweis: MCT, DCT. *(9 Punkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 8. Dezember 2020, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.