

9. Übung

1. Varianz.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{E}[X^2] < \infty$ und $a \in \mathbb{R}$. Zeige:

- a) X ist integrierbar, das heißt $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, *(3 Punkte)*
- b) $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$, *(3 Punkte)*
- c) $\mathbb{V}[X + a] = \mathbb{V}[X]$, *(1 Punkt)*
- d) $\mathbb{V}[aX] = a^2\mathbb{V}[X]$, *(1 Punkt)*
- e) $\mathbb{V}[X] = 0 \iff \exists c \in \mathbb{R} : X = c$, \mathbb{P} -fast sicher. Was ist c ? *(3 Punkte)*

2. Erwartungswerte.

Seien X und Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, wobei X diskret gleichverteilt auf $\{1, 2, \dots, 7\}$ sei und Y die Dichte $f(y) = cy(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)$, $c \in \mathbb{R}$ habe. Es gilt also

$$\mathbb{P}(X = i) = \frac{1}{7}, \quad i \in \{1, 2, \dots, 7\}, \quad \mathbb{P}(Y \in B) = \int_B cy(1-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)dy, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

- a) Berechne $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{V}[X]$ und \mathcal{M}_X . *(3 Punkte)*
- b) Bestimme c und berechne $\mathbb{E}[Y]$, $\mathbb{V}[Y]$ und \mathcal{M}_Y . *(4 Punkte)*

3. Mit den neuen Begriffen spielen.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind.

- i) X ist eine diskrete Zufallsvariable, d.h. F_X ist eine diskrete Verteilungsfunktion.
- ii) \mathbb{P}_X ist ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß. Das heißt, dass \mathbb{P}_X eine Summe von Diracmaßen ist (siehe Beispiel 1.4.7.).
- iii) Es existiert eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in \mathbb{R} und $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $[0, 1]$ mit $\sum_{n \in \mathbb{N}} p_n = 1$, sodass für jede messbare, positive Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow [0, \infty)$

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} f(a_n)p_n$$

gilt.

(4 Punkte)

4. Die Gamma-Verteilung.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x) dx, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

für $\alpha, \beta > 0$. Dann heißt X eine Gamma-verteilte Zufallsvariable und man schreibt

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta).$$

Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die momenterzeugende Funktion von X .

(8 Punkte)

Hinweis: Hierbei bezeichnet

$$\Gamma: (0, \infty) \rightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

die Gammafunktion. Für diese gilt insbesondere $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$, $\alpha > 0$.

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 1. Dezember 2020, 10:00 Uhr, in Ilias hochzuladen.