Stochastik 1 Merkblatt — **Universität Mannheim**
HWS 2022 — Felix Benning

Integration

1 Riemann Integral

1.1 Hauptsatz der Analysis

Theorem 1.1.1 (Hauptsatz I). *Sei*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

für ein stetiges f. Dann ist F stetig differenzierbar mit $F' = f$.

Beweis.

$$F^\delta(x) := \frac{F(x+\delta) - F(x)}{\delta} = \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} f(t)dt \le \frac{1}{\delta}\int_x^{x+\delta} \sup_{s\in[x,x+\delta]} f(s)dt = \sup_{s\in[x,x+\delta]} f(s)$$

Analog bekommt man die untere Schranke, mit der man mithilfe des Sandwichtheorems den Beweis beenden kann:

$$\begin{aligned} f(x) &\overset{\text{stetig}}{=} \liminf_{\delta\to 0} \inf_{s\in[x,x+\delta]} f(x) \le \liminf_{\delta\to 0} F^\delta(x) \\ &\le F'(x) \\ &\le \limsup_{\delta\to 0} F^\delta(x) \le \limsup_{\delta\to 0} \sup_{s\in[x,x+\delta]} f(x) \overset{\text{stetig}}{=} f(x). \end{aligned}$$

□

Theorem 1.1.2 (Hauptsatz II). *Sei F differenzierbar mit $F' = f$ für ein setiges f. Dann gilt*

$$\int_a^b f(t)dt = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a)$$

Beweis. Wir haben $F' = f$, definiere G wie F im Hauptsatz I. Dann gilt nach dem Hauptsatz I, dass $G' = f = F'$. Also gilt $(F-G)' = 0$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= (F-G)(b) - (F-G)(a) + (G(b) - G(a)) \\ &\overset{\text{MWS}}{=} \underbrace{(F-G)'(\xi)}_{=0} + G(b) - G(a) \\ &\overset{\text{def}}{=} \int_a^b f(x)dx - \underbrace{\int_a^a f(x)dx}_{=0}. \end{aligned}$$

□

Bemerkung (Stückweise Setig/Differenzierbar). *Mit der Linearität des Integrals, können diese Aussagen auch auf stückweise stetige f, bzw. stückweise differenzierbare F ausgeweitet werden.*

Beispiel 1.1.3 (sin Integration)**.** *Zeige*

$$\int_0^x \sin(t)dt = 1 - \cos(x)$$

Beweis. Es gilt $(-\cos)'(x) = \sin(x)$. Also gilt nach dem zweiten Hauptsatz

$$\int_0^x \sin(t)dt = (-\cos)(x) - (-\cos(0)) = 1 - \cos(x). \qquad \square$$

1.2 Uneigentliche Integrale

Es gibt immer wieder Fälle, in denen der Hauptsatz II nicht anwendbar ist, weil a und/oder b nicht in F einsetzbar ist, z.B. weil $a = -\infty$ oder $b = -\infty$, oder weil F dort eine Polstelle hat. In diesen Fällen, greifen wir zu uneigentlichen Integralen. Ein uneigentliches Integral für $a \in \mathbb{R}$, $a \leq b \leq \infty$ ist definiert als

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_a^\beta f(x)dx = \lim_{\beta \uparrow b} F(x)\Big|_a^\beta =: F(x)\Big|_a^b$$

Und analog für die untere Grenze. Falls beide Grenzen problematisch sind, teilt man das Integral in zwei Teile. Konvergieren beide Seiten, kann man das Integral wieder zusammensetzen:

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\beta \uparrow b} \int_0^\beta f(x)dx + \lim_{\alpha \downarrow a} \int_\alpha^0 f(x)dx = \underbrace{\lim_{\beta \uparrow b} F(x)\Big|_0^\beta + \lim_{\alpha \downarrow a} F(x)\Big|_\alpha^0}_{=\lim_{\beta \uparrow b} F(\beta) - \lim_{\alpha \downarrow a} F(\alpha)} =: F(x)\Big|_a^b$$

Beispiel 1.2.1 (exp Integration)**.** *Sei* $c \geq 0$*, dann gilt*

$$\int_0^\infty \exp(-ct)dt = \lim_{x \to \infty} -\frac{1}{c}\exp(-ct)\Big|_0^x = -\left(0 - \frac{1}{c}\right) = \frac{1}{c}.$$

Beispiel 1.2.2 (tan^{-1})**.** *Zeige*

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Beweis. Es gilt

$$\tan'(x) = \left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)' = \frac{\cos(x)}{\cos(x)} + \frac{\sin(x)^2}{\cos(x)^2} = 1 + \tan(x)^2,$$

und folglich

$$(\tan^{-1})'(x) = \frac{1}{\tan'(\tan^{-1}(x))} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Also gilt

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^2}dx = \tan^{-1}(x)\Big|_0^\infty = \lim_{x \to \infty} \tan^{-1}(x) - \tan^{-1}(0) = \frac{\pi}{2}. \qquad \square$$

1.3 Partielle Integration

Theorem 1.3.1 (Partielle Integration)**.**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beweis. Folgt aus der **Produktregel**

$$\frac{d}{dx}f(x)g(x) = f(x)g'(x) + f'(x)g(x), \tag{1}$$

da mit Umstellen gilt:

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx \overset{(1)}{=} \int_a^b \frac{d}{dx}f(x)g(x) - f'(x)g(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx. \qquad \square$$

Beispiel 1.3.2 (sin-exp Produkt)**.** *Zeige*

$$I = \int_0^b \sin(t)\exp(-ct)dt = \frac{1-(\cos(b)+c\sin(b))e^{-cb}}{1+c^2}.$$

Beweis. Die Gleichung

$$\begin{aligned} I &= -\cos(t)\exp(-ct)\Big|_0^b - c\int \cos(t)\exp(-ct)dt \\ &= \cos(0) - \cos(b)\exp(-cb) - c\left(\sin(t)\exp(-ct)\Big|_0^b + c\int \sin(t)\exp(-ct)dt\right) \\ &= 1-\cos(b)e^{-cb} - c\left(\sin(b)e^{-cb} + cI\right) \end{aligned}$$

impliziert nach umstellen nach I

$$I = \frac{1-\cos(b)e^{-cb} - c\sin(b)e^{-cb}}{1+c^2}. \qquad \square$$

Beispiel 1.3.3 (sin-Potenzen)**.** *Zeige*

$$I_n = \int_0^\pi \sin^n(t)dt = \frac{(n-1)!!}{n!!}\begin{cases} \pi & n \text{ gerade} \\ 2 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

mit $0!! = (-1)!! = 1$ *und* $n!! = n(n-2)!!$.

Beweis. Wir wenden Induktion an. Der Induktionsanfang ist $I_0 = \pi$ und $I_1 = 2$ nach Beispiel 1.1.3. Angenommen wir haben nun I_{n-1}, I_n, dann gilt

$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^\pi \sin^{n+1}(t)dt &= \int_0^\pi \sin^n(t)\frac{d}{dt}\left(-\cos(t)\right)dt \\ &= \underbrace{-\sin^n(t)\cos(t)\Big|_0^\pi}_{=0} - \int_0^\pi -n\sin^{n-1}(t)\underbrace{\cos^2(t)}_{1-\sin^2(t)}dt \\ &= nI_{n-1} - nI_{n+1}. \end{aligned}$$

Damit haben wir den Induktionsschritt:

$$I_{n+1} = \frac{n}{n+1} I_{n-1} = \frac{n}{n+1} \frac{(n-2)!!}{(n-1)!!} \begin{cases} \pi & n-1 \text{ gerade} \\ 2 & n-1 \text{ ungerade} \end{cases} = \frac{n!!}{(n+1)!!} \begin{cases} \pi & n+1 \text{ gerade} \\ 2 & n+1 \text{ ungerade.} \end{cases}$$

□

Beispiel 1.3.4 (Gamma Funktion)**.** *Die Gamma Funktion ist definiert als*

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty x^{z-1} \exp(-x) dx$$

Es gilt $\Gamma(n) = (n-1)!$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$ *und allgemeiner* $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. *Die Gamma Funktion ist also eine Verallgemeinerung der Fakultät auf die reellen (komplexen) Zahlen.*

Beweis. Die Aussage über die natürlichen Zahlen zweigen wir per Induktion mit Induktionsanfang $n = 1$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty \exp(-x) dx = \lim_{k \to \infty} -\exp(-x)\Big|_0^k = 1.$$

Der Induktionsschluss folgt direkt aus der allgemeinen Aussage $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, die wir nun zeigen:

$$\begin{aligned} \Gamma(z+1) &= \int_0^\infty x^z \exp(-x) dx \\ &\overset{\text{PI}}{=} \underbrace{\lim_{k \to \infty} -x^z \exp(-x)\Big|_0^k}_{=0} - \int_0^k -zx^{z-1} \exp(-x) dx \\ &= z \underbrace{\int_0^k -x^{n-1} \exp(-x) dx}_{=\Gamma(z)}. \end{aligned}$$

□

Die Gammafunktion braucht man beispielsweise für die Gammaverteilung, die zum Beispiel die Verteilung von Summen von quadrierten Normalverteilten Zufallsvariablen oder Summen von Exponentiell verteilten Zufallsvariablen beschreibt.

Beispiel 1.3.5 (Distributionen)**.** *Sei* $\varphi \in C_c^\infty$ *(glatt mit kompaktem Support). Dann gilt für alle differenzierbaren* f

$$\begin{aligned} \int f'(x)\varphi(x) dx &= \underbrace{f(x)\varphi(x)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0 \quad \textit{(kompakter Support)}} - \int f(x)\varphi'(x) dx \\ &= -\int f(x)\varphi'(x) dx. \end{aligned} \tag{2}$$

D.h. wir können statt f *auch immer* φ *ableiten. Man kann diesen Trick verwenden um nicht differenzierbare Funktionen "abzuleiten". Das wird verwendet, um Lösungen für PDEs mit unstetigen Anfangsbedingungen zu bestimmen. Diese Lösungen werden auch "schwache Lösungen" gennant, weil es sich dabei nicht um differenzierbare Funktionen, sondern "Distributionen" handelt.*

Die Menge der Distributionen ist formal definiert als $\mathcal{D} := (C_c^\infty)^*$, d.h. der Dualraum der glatten Funktionen mit kompaktem Support. Zur Erinnerung: der Dualraum enthält alle linearen Funktionen $C_c^\infty \to \mathbb{R}$. Sei nun $f \in C_c^\infty$, dann ist

$$F : \begin{cases} C_c^\infty \to \mathbb{R} \\ \varphi \mapsto \int \varphi(x) f(x) dx \end{cases}$$

ein Element aus $\mathcal{D}$. Indem wir F mit f identifizieren wird C_c^∞ ein Unterraum von $\mathcal{D}$. Aber $\mathcal{D}$ ist noch viel größer. Alle stetigen Funktionen sind beispielsweise mit einer ähnlichen Integral Identifizierung enthalten. Ebenso können wir ein Maß μ mit der Distribution $\varphi \mapsto \int \varphi(x) d\mu(x)$ identifizieren.

Nun können wir Ableiten auf Distributionen definieren. Da für alle $\varphi \in C_c^\infty$ gilt $\varphi' \in C_c^\infty$, ist für alle $F \in \mathcal{D}$

$$F' := \frac{d}{dx} F := -F \circ \frac{d}{dx}$$

wohldefiniert. Außerdem ist F' eine Distribution, da die Ableitung linear ist, die Verknüpfung somit auch, und nach $\mathbb{R}$ abbildet. Wegen (2) ist die Ableitung von Distributionen auf dem Unterraum der differenzierbaren Funktionen identisch mit der normalen Ableitung. Somit handelt es sich wirklich um eine Erweiterung des Ableitungsbegriffs.

Wir wollen nun zeigen, dass $\mathbf{1}'_{[0,\infty)} = \delta_0$ im Sinne von Distributionen. Mit anderen Worten: Wir können auch diskrete Verteilungsfunktionen ableiten um eine Art "Dichte" zu erhalten.

Doch bevor wir das tun, wollen wir unsere Intuition für Gleichheit im Sinne von Distributionen schärfen. Denn im Sinne von Distributionen gilt $\mathbf{1}_{[0,\infty)} = \mathbf{1}_{(0,\infty)}$. Warum ist das der Fall? Es gilt für jedes $\varphi \in C_c^\infty$, dass

$$\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\varphi) = \int \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\varphi(x) dx = \int \mathbf{1}_{(0,\infty)}(x)\varphi(x) dx = \mathbf{1}_{(0,\infty)}(\varphi)$$

also handelt es sich um die selbe duale Abbildung. Allgemeiner tritt dieses Problem auf, wenn zwei Funktionen Lebesgue fast sicher gleich sind. Da wir bei stetigen Funktionen nicht einzelne Punkte versetzen können, haben wir dort dieses Problem dagegen nicht. Ein ähnliches Problem tritt bei der Definition der L^p Räume in Lemma 3.4.8 der Vorlesung auf. Das Problem wird dort mit Äquivalenzklassen gelöst. Hier könnte man so etwas auch tun.

Zurück zu unserem ursprünglichen Ziel: es gilt für alle $\varphi \in C_c^\infty$

$$\begin{aligned} \mathbf{1}'_{[0,\infty)}(\varphi) &= -\mathbf{1}_{[0,\infty)}(\varphi') = -\int \mathbf{1}_{[0,\infty)}(x)\varphi'(x) dx = -\varphi(x)\Big|_0^\infty \\ &= \varphi(0) \\ &= \int \varphi(x) d\delta_0(x) = \delta_0(\varphi). \end{aligned}$$

Somit gilt $\mathbf{1}'_{[0,\infty)} = \delta_0$ im Sinne von Distributionen.

1.4 Substitutionsregel

Theorem 1.4.1 (Substitutionsregel)**.** *Für ein differenzierbares g, gilt*

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))\frac{dy}{dx}dx$$

Beweis. Folgt aus der **Kettenregel**

$$\frac{d}{dx}F(g(x)) = F'(g(x))g'(x). \tag{3}$$

Denn sei $F' = f$, dann gilt

$$\begin{aligned}\int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy &= F(g(b)) - F(g(a)) \\ &= \int_a^b \frac{d}{dx}F(g(x))dx \overset{(3)}{=} \int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_a^b f(g(x))g'(x)dx.\end{aligned}$$ □

Bemerkung (Merkregel)**.** *So tun als sei $\frac{dy}{dx}$ ein Bruch:*

$$y := g(x) \implies \frac{dy}{dx} = g'(x) \implies \text{“}dy = g'(x)dx\text{”}$$

Diese Intuition hilft bei der umgekehrten Verwendung. Sei $g := h^{-1}$, also

$$y = h^{-1}(x) \implies \frac{dy}{dx} = \frac{1}{h'(h^{-1}(x))} = \frac{1}{h'(y)} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} \implies \text{“}h'(y)dy = dx\text{”}$$

und definiere $\tilde{f}(y) := f(y)h'(y)$, dann gilt

$$\int_{h^{-1}(a)}^{h^{-1}(b)} \overbrace{f(y)h'(y)}^{=:\tilde{f}(y)}\,dy = \int_a^b \tilde{f}(h^{-1}(x))(h^{-1})'(x)dx = \int_a^b f(h^{-1}(x))dx.$$

Korollar 1.4.2. *Wenn g zusätzlich invertierbar ist, dann gilt*

$$\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)(g^{-1})'(y)dy = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\frac{dx}{dy}dy.$$

Beispiel 1.4.3 (Parameter Entfernen)**.** *Mit der Substitutionsregel, lassen sich die Parameter der allgemeinen Exponentialverteilung entfernen:*

$$F_\lambda(t) = \int_0^t \underbrace{\lambda}_{=\frac{dy}{dx}} \exp(-\lambda x)dx \overset{y=\lambda x}{=} \int_0^{\lambda t} \exp(-y)dy = F_1(\lambda t).$$

Ähnlich kann man eine allgemeine Normalverteilung leicht auf $\mathcal{N}(0,1)$ zurückführen:

$$\begin{aligned}F_{\mu,\sigma^2}(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^t \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)dx \overset{y=\frac{x-\mu}{\sigma}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \exp(-y/2)\underbrace{\frac{dx}{dy}}_{=\sigma}dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\frac{t-\mu}{\sigma}} \exp(-y/2)\,dy \\ &= F_{0,1}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right).\end{aligned}$$

2 Lebesgue Integral

Für den Hauptsatz I haben wir nur Linearität und Monotonie des Integrals gebraucht und bekommen dann den Hauptsatz II mit dem Mittelwertsatz quasi geschenkt dazu. Folglich müssen beide Integrale für stetige Funktionen übereinstimmen

$$\int_{[a,b]} f d\lambda = \int_a^b f(x)dx.$$

Mit der Linearität des Integrals bekommt man diese Aussagen dann letztendlich auch für stückweise stetige Funktionen. Partielle Integration und Substitutionsregel folgen direkt aus den Hauptsätzen.

Was Probleme verursacht, sind uneigentliche Integrale. Das Riemann Integral ist definiert als Limes von "normalen Integralen" (für die die Gleichheit, wegen den Hauptsätzen für stetige f, gilt)

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_{[a,b]} f d\lambda \overset{\text{def}}{=} \lim_{b\to\infty} \int \mathbf{1}_{[a,b]} f d\lambda.$$

Nun fragt sich also, ob

$$\lim_{b\to\infty} \int \mathbf{1}_{[a,b]} f d\lambda \overset{?}{=} \int \mathbf{1}_{[a,\infty)} f d\lambda \overset{\text{def}}{=} \int_{[a,\infty)} f d\lambda$$

gilt. Ist $f \geq 0$ folgt das mit immer mit monotoner Konvergenz. Ist f bzw. $|f|$ integrierbar, folgt das immer mit dominierter Konvergenz.

Beispiel 2.0.1 (Riemann aber nicht Lebesgue)**.** *Berechne (und begründe die Existenz) des uneigentlichen Riemann Integrals*

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Zeige, dass $\frac{\sin(x)}{x}$ *nicht Lebesgue integrierbar ist.*

Beweis. Nach Beispiel (1.2.1) gilt $\int_0^\infty e^{-xy} dy = \frac{1}{x}$, also

$$\int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^b \int_0^\infty e^{-xy} \sin(x) dy dx \overset{\text{Fubini}}{=} \int_0^\infty \underbrace{\int_0^b e^{-xy} \sin(x) dx}_{\overset{\text{Bsp. 1.3.2}}{=} \frac{1-(\cos(b)+y\sin(b))e^{-yb}}{1+y^2}} dy$$

wobei wir hier Fubini verwenden können, da $|e^{-xy}\sin(x)| \leq e^{-xy}$ über $[0,b]\times[0,\infty)$ (auch Lebesgue) integrierbar ist. Nun gilt aber

$$\left| \frac{1-(\cos(b)+y\sin(b))e^{-yb}}{1+y^2} \right| \leq \frac{1}{1+y^2} + \frac{(1+y)e^{-yb}}{1+y^2} \leq \frac{K}{1+y^2},$$

da für $b \geq 1$ gilt $ye^{-yb} \leq ye^{-y} \to 0$ für $y \to \infty$ und damit uniform über all $b \geq 1$ beschränkt ist. Damit haben wir eine integeribare[1] Majorante für dominierte Konvergenz gefunden und können den Limes über b in das Integral ziehen

$$\lim_{b\to\infty} \int_0^b \frac{\sin(x)}{x} dx = \int_0^b \lim_{b\to\infty} \frac{1-(\cos(b)+y\sin(b))e^{-yb}}{1+y^2} dy = \int_0^b \frac{1}{1+y^2} dy \overset{\text{Bsp. 1.2.2}}{=} \frac{\pi}{2}.$$

[1] siehe Beispiel 1.2.2

Bleibt noch zu zeigen, dass $\frac{\sin(x)}{x}$ nicht Lebesgue integrierbar ist. Hierzu genügt es zu zeigen, dass

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)} \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| dx &\geq \int_{[0,\infty)} \frac{|\sin(x)|}{2\pi\lceil x/2\pi\rceil} dx = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi k} \int_{[2\pi(k-1),2\pi k)} |\sin(x)| dx \\ &= \underbrace{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |\sin(x)| dx}_{>0} \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}}_{=\infty} = \infty.\end{aligned}$$

□

2.1 Transformationssatz

Theorem 2.1.1 (Abstrakter Transformationssatz)**.** *Sei $g : \Omega \to \Omega'$ messbar, $f : \Omega' \to \mathbb{R}$ messbar und so dass folgendes wohldefiniert ist ($f \geq 0$ oder integrierbar)*

$$\int_{\Omega} f \circ g d\mu = \int_{\Omega'} f d\mu_g$$

mit $\mu_g(B) := \mu(g^{-1}(B))$.

Während der Beweis relativ einfach ist, ist das Ergebnis so auch noch nicht sonderlich nützlich, weil μ_g noch zu bestimmen ist.

Lemma 2.1.2 (Lineares Bildmaß des Lebesgue Maß)**.** *Se λ das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ und g eine invertierbare lineare Funktion, d.h.*

$$g(x) = Ax,$$

dann gilt

$$\lambda_g = \frac{1}{|\det(A)|}\lambda = |\det(A^{-1})|\lambda$$

Beweisskizze. **Schritt 1:** Zeige für jedes verschiebungsinvariantes Maß μ, dass es zwangsläufig von der Form $c\lambda$ sein muss.

Definiere hierfür $c := \mu([0,1]^n)$ und leite die Größe aller rationalen Quader durch Verschieben und zusammenstecken von kleineren Quadern aus dieser Konstante her. Da die Menge alle rationalen Quader ein schnittstabiles Erzeuger ist, der die Borel-σ-Algebra erzeugt, folgt mit dem Eindeutigkeitssatz, dass $\mu = c\lambda$.

Schritt 2: Zeige, dass λ_g verschiebungsinvariant ist (folglich $\lambda_g = c\lambda$).

Es gilt, für eine Borelmenge B und $x \in \mathbb{R}^n$

$$\lambda_g(B+x) = \lambda(g^{-1}(B+x)) \overset{g^{-1}\text{linear}}{=} \lambda(g^{-1}(B) + g^{-1}(x)) \overset{\lambda \text{ versch.inv.}}{=} \lambda(g^{-1}(B)) = \lambda_g(B).$$

Schritt 3: Bestimme die Konstante c durch einsetzen von $[0,1]^n$. Zuerst für diagonale A.

$A^{-1}[0,1]^n$ streckt den Quader um $1/a_{ii}$ in die Richtung i. Falls $a_{ii} < 0$ flippt das Intervall außerdem auf die negative Seite, das hat allerdings keinen Einfluss auf die Größe. Das resultierende Volumen ist also

$$\lambda_g([0,1]^n) = \lambda(A^{-1}[0,1]^n) = \left|\prod_{i=1}^{n} 1/a_{ii}\right| = \frac{1}{|\det(A)|}$$

Schritt 4: Verwende die Singulärwertzerlegung von A, d.h. $A = UDV^T$ mit U, V Basiswechselmatrizen auf andere orthonormale Vektoren und D diagonal. U und V sind Isometrien (verändern das Volumen nicht). Also gilt

$$\lambda_g([0,1]^n) = \frac{1}{|\det(D)|}.$$

Zuletzt gilt für beliebige quadratische Matrizen C, B

$$\det(CB) = \det(C)\det(B),$$

also $1 = \det(\mathbb{I}) = \det(UU^T) = \det(U)^2$ und somit $\det(D) = \det(A)$. $\square$

Theorem 2.1.3 (Transformationssatz in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $g : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus (stetig differenzierbar und invertierbar) mit $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$\int_\Omega f \circ g(x) dx = \int_{\Omega'} f(y) \left|\det\left((g^{-1})'(y)\right)\right| dy = \int_{\Omega'} f(y) \left|\det\left(\frac{dx}{dy}\right)\right| dy$$

oder auch

$$\int_\Omega f(y) dy = \int_{\Omega'} f \circ g(x) \left|\det\left(g'(x)\right)\right| dx = \int_{\Omega'} f \circ g(x) \left|\det\left(\frac{dy}{dx}\right)\right| dx.$$

Beweisskizze. Zerteile Ω durch ein δ Gitter, sodass g dort bis auf ein ϵ seiner ersten Taylorapproximation entpricht. Die erste Taylorapproximation ist aber eine affin-lineare Abbildung. Wir wenden also das Lemma 2.1.2 für lineare Funktionen an, und stecke die Integrale vorsichtig wieder mit der Linearität von Integralen zusammen.
Die zweite Gleichung ergibt sich aus $\tilde{f} = f \circ g$ und $\tilde{g} = g^{-1}$ und der ersten Formel. $\square$

Bemerkung. *Auch wenn dieser konkrete Transformationssatz sehr ähnlich zur Substitutionsregel aussieht, und in einer Dimension tatsächlich für invertierbare g mit ihr übereinstimmt*[2]*, ist er eigentlich nicht die Substitutionsregel in n Dimensionen. Denn da die Kettenregel auch in n Dimensionen gilt, ist die Substitutionsregel auch von sich aus schon in n Dimensionen gültig. Typischerweise möchte man aber lieber mit der Determinanten der Ableitung als der Ableitungsmatrix selbst arbeiten, weshalb die "echte" n-Dimensionale Substitutionsregel kaum Anwendung findet und dieser Transformationssatz häufig auch n-dimensionale Substitutionsregel genannt wird.*

Beispiel 2.1.4 (Polarkoordinaten)**.** *Ein besonderer Trick, der durch den Transformationssatz möglich wird, sind die Polarkoordinaten*

$$\phi : \begin{cases} [0,\infty) \times [0, 2\pi) \to \mathbb{R}^2 \\ (r, \varphi) \mapsto r(\cos(\varphi), \sin(\varphi)) \end{cases}$$

[2] Invertierbarkeit von g impliziert, dass g' entweder strikt positiv oder strikt negativ ist. Und das Tauschen der Integralgrenzen bei monotonem Fallen führt zu einem Minus, was dem Betrag im Transformationssatz entspricht.

Mit diesem Trick, lässt sich das Quadrat der Gaussdichte integrieren

$$
\begin{aligned}
\left(\int \exp\big(-x^2/2\big)dx\right)^2 &= \int\int \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)dxdy \\
&= \int_0^{2\pi}\int_0^\infty \exp\Big(-\underbrace{\frac{(r\cos(\varphi))^2+(r\sin(\varphi))^2}{2}}_{=r^2/2}\Big)\underbrace{|\det(\phi'(r,\varphi))|}_{\overset{(4)}{=}r}drd\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} -\exp(-r^2/2)\Big|_0^\infty d\varphi \\
&= 2\pi,
\end{aligned}
$$

da gilt

$$
\det(\phi'(r,\varphi)) = \det\left(\begin{pmatrix}\cos(\varphi) & -r\sin(\varphi)\\ \sin(\varphi) & r\cos(\varphi)\end{pmatrix}\right) = r\cos(\varphi)^2 + r\sin(\varphi)^2 = r. \tag{4}
$$

Hier haben wir ein bisschen geschummelt: ϕ ist kein Diffeomorphismus, da da ϕ^{-1} nicht differenzierbar ist für φ nahe 0 bzw 2π. Um diesen Sprung zu entfernen, betrachte nur $(0, 2\pi)$. Das entfernt nur eine Linie aus $\mathbb{R}^2$, was Maß Null hat und hat somit keinen Effekt auf das Integral (richtiger Beweis ist Übung).

2.2 Vertauschung von Ableitung und Integral

Wenn man den Hauptsatz der Analysis im Kopf hat, klingt das zunächst einmal sinnlos. Aber wenn man eine andere Koordinate ableitet, als man integriert, macht diese Frage durchaus Sinn.

Theorem 2.2.1 (Ableitung und Integral Vertauschen)**.** *Sei $(t,\omega)\mapsto f(t,\omega)$ eine*

- *messbare Funktion,*
- *die über ω μ-integrierbar ist für alle feste t,*
- *und für μ-fast alle $\omega\in\Omega$ gilt: $t\to f(t,\omega)$ ist differenzierbar (bzw. absolutstetig) in t.*

Falls $\frac{\partial}{\partial t}f$ "lokal integrierbar in x" ist, d.h. es $a<b\in\mathbb{R}$ gibt, sodass $x\in[a,b]$ und

$$
\int_a^b\int_\Omega\left|\frac{d}{dt}f(t,\omega)\right|d\mu(\omega)dt<\infty
$$

gilt, dann darf man Ableitung und Integral an der Stelle x vertauschen

$$
\frac{\partial}{\partial t}\int f(x,\omega)d\mu(\omega) = \int\frac{\partial}{\partial t}f(x,\omega)d\mu(\omega).
$$

Beweis. Sei o.B.d.A. $x < b$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\int f(x,\omega)d\mu(\omega) &\overset{\text{linear}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{f(x+\epsilon,\omega)-f(x,\omega)}{\epsilon}d\mu(\omega)\\
&\overset{\text{Hauptsatz II}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\int \frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\frac{\partial}{\partial t}f(t,\omega)dtd\mu(\omega)\\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \lim_{\epsilon\to 0}\frac{1}{\epsilon}\int_x^{x+\epsilon}\int \frac{\partial}{\partial t}f(t,\omega)d\mu(\omega)dt\\
&= \frac{d}{dy}\Big|_{y=x}\int_x^y\int\frac{\partial}{\partial t}f(t,\omega)d\mu(\omega)dt\\
&\overset{\text{Hauptsatz I}}{=} \int\frac{\partial}{\partial t}f(t,\omega)d\mu(\omega)dt.
\end{aligned}$$

□

Wie man sieht, brauchen wir eigentlich alle Voraussetzungen nur, damit die Objekte über die wir sprechen wohldefiniert sind. Nur die “lokalen Integrierbarkeit” ist wirklich zusätzlich. Denn es genügt nicht, dass die Ableitung nur in x über ω μ-integrierbar ist. Die resultierende Funktion in x

$$F : x \to \int\left|\frac{\partial}{\partial t}f(x,\omega)\right|d\mu(\omega)$$

muss friedlich genug sein, dass man sie zumindest in einer Umgebung noch integrieren kann. Die Folgenden Bedingungen sind also hinreichend:

(i) F stetig in x

(ii) F beschränkt in x

(iii) uniform $\left|\frac{\partial}{\partial t}f(t,\omega)\right| \leq g(\omega)$ für ein integrierbares g

(iv) $t \mapsto |\frac{\partial}{\partial t}f(t,\omega)|$ ist lokal um x monoton in t.

Beispiel 2.2.2 (Geometrische Verteilung)**.** *Sei $\mu = \sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^{k-1}p\delta_k$ die geometrische Verteilung, Dann gilt*

$$\int xd\mu(x) = \frac{1}{p}.$$

Beweis. Sei $\nu(A) := |A\cap\mathbb{N}|$ bzw. $\nu = \sum_{k=1}^{\infty}\delta_k$ das Zählmaß auf den natürlichen Zahlen. Dies ermöglicht es uns, eine Summe als Integral aufzufassen:

$$\begin{aligned}
\int xd\mu(x) = \sum_{k=1}^{\infty}k(1-p)^{k-1}p &= p\int\frac{d}{dp}-(1-p)^k d\nu(k)\\
&= p\frac{d}{dp}-\underbrace{\sum_{k=1}^{\infty}(1-p)^k}_{=\frac{1}{1-(1-p)}-1=\frac{1}{p}-1} = p\frac{1}{p^2}\\
&= \frac{1}{p}.
\end{aligned}$$

□

Integrationshilfe

Theorem (Partielle Integration)**.**

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx$$

Beweis. Folgt aus der **Produktregel**. □

- Funktioniert gut bei Produkten mit, oder Potenzen von $\exp, \cos, \sin$
- Wird verwendet zum Ableiten von Distributionen

Theorem (Substitutionsregel)**.** *Für differenzierbare g gilt*

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)dy$$

ist g zusätzlich invertierbar, gilt

$$\int_a^b f(g(x))dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)(g^{-1})'(y)dy = \int_{g(a)}^{g(b)} f(y)\frac{dx}{dy}dy.$$

Beweis. Folgt aus der **Kettenregel**. □

- Nützlich zum Entfernen von unnötigen Parametern

Theorem (Transformationssatz in $\mathbb{R}^n$)**.** *Sei $g : \Omega \to \Omega'$ ein Diffeomorphismus (stetig differenzierbar und invertierbar) mit $\Omega, \Omega' \subseteq \mathbb{R}^n$, dann gilt*

$$\int_\Omega f \circ g(x)dx = \int_{\Omega'} f(y)\left|\det\left((g^{-1})'(y)\right)\right|dy = \int_{\Omega'} f(y)\left|\det\left(\frac{dx}{dy}\right)\right|dy$$

oder auch

$$\int_\Omega f(y)dy = \int_{\Omega'} f \circ g(x)\left|\det\left(g'(x)\right)\right|dx = \int_{\Omega'} f \circ g(x)\left|\det\left(\frac{dy}{dx}\right)\right|dx.$$

Beweis. Bildmaß von linearen Funktionen bestimmen und abstrakten Trafo anwenden. Die erste Taylorapproximation ist auf immer kleineren Zerstückelungen von Ω schlussendlich exakt. □

- Besonderer Trick: Polarkoordinaten