Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Stochastik I

3. Übung

1. Fortsetzungen von Mengenfunktionen zu Maßen.

Sei

$$\mathcal{E} := \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ endlich}\}$$

und die Mengenfunktion

$$\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty], \quad E \mapsto 0,$$

gegeben.

a) Zeige, dass $\mathcal{E}$ ein Semiring ist und bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. *(4 Punkte)*

b) Zeige, dass es unendlich viele verschiedene Fortsetzungen von μ zu Maßen auf $\sigma(\mathcal{E})$ gibt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Satz 1.3.8.? *(4 Punkte)*

2. Approximationseigenschaften von Mengenfunktionen auf Semiringen.

Sei $\mathcal{S}$ ein Semiring und μ ein Maß auf $\sigma(\mathcal{S})$, so dass die Einschränkung von μ auf $\mathcal{S}$ σ-endlich ist. Zeige, dass zu jeder Menge $A \in \sigma(\mathcal{S})$ mit $\mu(A) < \infty$ und beliebigem $\epsilon > 0$ paarweise disjunkte Teilmengen $B_1, ..., B_n \in \mathcal{S}$ existieren, so dass

$$\mu(A \triangle \bigcup_{i=1}^{n} B_i) < \epsilon$$

gilt. *Hinweis: Benutzt werden könnte (fast) alles von Lemma 1.3.2 bis zum Satz von Carathéodory. Es lohnt sich, ein Bildchen zu malen.*

(8 Punkte)

3. Diskrete Verteilungsfunktionen und Mischungen von Diracmaßen.

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen, $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

erfüllt ist und die Funktion F definiert als

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad t \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} p_n \mathbf{1}_{[a_n,\infty)}(t).$$

a) Zeige, dass F eine Verteilungsfunktion ist. *(2 Punkte)*

b) Bestimme das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. *(2 Punkte)*

c) Berechne $\mathbb{P}((a,b])$ und $\mathbb{P}([a,b])$ für beliebige $a,b \in \mathbb{R}$. Wann gilt $\mathbb{P}((a,b]) \neq \mathbb{P}([a,b])$?

(2 Punkte)

d) Skizziere F mit $a_n = n$ und $p_n = \frac{6}{(\pi n)^2}$ für $n \in \mathbb{N}$. *(2 Punkte)*

Hinweis: Für Aufgabenteil b) könnt ihr vom letztem Übungsblatt benutzen, dass eine Mischung von Wahrscheinlichkeitsmaßen wieder ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

4. Das Lebesgue-Maß.

Sei $\mathcal{S} := \{(a,b] : a,b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ und

$$\lambda\colon \mathcal{S} \to [0,\infty), \quad (a,b] \mapsto \lambda((a,b]) = b - a.$$

Setze λ mittels des Fortsetzungssatzes zu einem Maß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ fort. Zeige zudem, dass die Fortsetzung von λ ein unendliches Maß ist.

Hinweis: Den Beweisweg haben wir schon in der Vorlesung skizziert. Um die Details auszuarbeiten, orientiert ihr euch am besten an Satz 1.4.4 aus der Vorlesung.

(6 Punkte)

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag, den 20. Oktober 2020, 10:00 Uhr, in Ilias als ein einziges PDF Dokument oder in den Briefkästen in A5 abzugeben.