

2. Übung

1. Noch mehr Spaß mit Dynkin-Systemen.

a) Sei Ω eine nicht leere Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Zeige, dass das Mengensystem \mathcal{D} ein Dynkin-System, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A, B \in \mathcal{D}$ und $A \subseteq B \implies B \setminus A \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \dots \in \mathcal{D}$ und $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3 \subseteq \dots \implies \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{D}$.

(3 Punkte)

b) Sei $|\Omega| = 2n \geq 4, n \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{D} := \{D \subseteq \Omega : |D| \text{ ist gerade}\}$.

i) Zeige, dass \mathcal{D} ein Dynkin-System ist.

(2 Punkte)

ii) Widerlege per Gegenbeispiel, dass \mathcal{D} eine σ -Algebra ist.

(1 Punkt)

iii) Zeige mit Proposition 1.2.9, dass \mathcal{D} keine σ -Algebra ist.

(1 Punkt)

iv) Charakterisiere die Menge $\sigma(\mathcal{D}) \setminus \mathcal{D}$ (mit kurzer Begründung).

(1 Punkt)

2. Eigenschaften von Verteilungsfunktionen.

Sei \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto F(x) := \mathbb{P}((-\infty, x]),$$

die Verteilungsfunktion von \mathbb{P} . Zeige, dass eine solche Verteilungsfunktion folgende Eigenschaften erfüllt:

a) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

(1 Punkt)

b) F ist monoton steigend,

(2 Punkte)

c) F ist rechtsseitig stetig,

(2 Punkte)

d) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$.

(2 Punkte)

3. Erzeuger von σ -Algebren.

(a) Zeige, dass die Mengensysteme

$$\mathcal{E}_1 := \{(a, \infty) : a \in \mathbb{R}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind. (2 Punkte)

Hinweis: Ihr dürft dafür das Ergebnis aus der Vorlesung nutzen, dass die Menge der offenen Intervalle in \mathbb{R} auch ein Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ ist.

(b) Sei $\Omega = \{a, b, c, d\}$ und $\mathcal{E} = \{\{a, b\}, \{d\}\}$. Bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. (2 Punkte)

4. Noch mehr zu Erzeugern von σ -Algebren.

Sei $f : \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ und $\mathcal{E}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$. Zeige, dass

$$\sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2)) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{E}_2))$$

gilt. (6 Punkte)

Hinweis: Betrachtet für eine Inklusionsrichtung das Mengensystem

$$\mathcal{C} := \{B \subseteq \Omega_2 \mid f^{-1}(B) \in \sigma(f^{-1}(\mathcal{E}_2))\}.$$

5. Semiring Trauma.

Seien $\mathcal{S}_1 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $\mathcal{S}_2 \subseteq \mathcal{P}(\Omega_2)$ zwei Semiringe und \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 σ -Algebren über Ω_1 und Ω_2 .

(i) Zeige, dass das Produkt von \mathcal{S}_1 und \mathcal{S}_2 , definiert als

$$\mathcal{S}_1 \times \mathcal{S}_2 := \{A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A \in \mathcal{S}_1, B \in \mathcal{S}_2\}$$

wieder ein Semiring ist. (4 Punkte)

(ii) Zeige, dass das Produkt von \mathcal{A}_1 und \mathcal{A}_2 (vgl. ÜB 1 Aufgabe 1) schnittstabil ist. (1 Punkt)

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag, den 13. Oktober 2020, 10:00 Uhr, in Ilias als PDF oder in den Briefkästen in A5 abzugeben.