Prof. Dr. Leif Döring
Leonardo Vela

Stochastik I

1. Übung

1. Weitere Eigenschaften von σ-Algebren und Maßen.

a) Sei $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω und $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass

$$\mathcal{A}_A := \{B \cap A \mid B \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über A ist. Die σ-Algebra $\mathcal{A}_A$ nennt man auch Spuralgebra von $\mathcal{A}$ unter A.

(3 Punkte)

b) Sei $f : \Omega_1 \to \Omega_2$ und $\mathcal{A}_2$ eine σ-Algebra über Ω_2. Zeige, dass

$$\mathcal{A}_1 := f^{-1}(\mathcal{A}_2) = \{f^{-1}(A_2) \mid A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra über Ω_1 ist. *(2 Punkte)*

c) Seien $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$ σ-Algebren über Ω_1 und Ω_2. Zeige oder widerlege, dass das Produkt von $\mathcal{A}_1$ und $\mathcal{A}_2$, definiert als

$$\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2 := \{A \times B \subseteq \Omega_1 \times \Omega_2 \mid A \in \mathcal{A}_1, B \in \mathcal{A}_2\}$$

eine σ-Algebra über $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist. *(2 Punkte)*

d) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, μ ein endliches Maß und $A_1, A_2, B \in \mathcal{A}$. Zeige, dass für $A_1, A_2 \subseteq B$

$$\mu(B \backslash (A_1 \cup A_2)) = \mu(B) - \mu(A_1) - \mu(A_2) + \mu(A_1 \cap A_2),$$

gilt. *(2 Punkte)*

e) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ beliebig. Zeige, dass die sogenannte Subadditivät von Maßen gilt, also

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i).$$

(3 Punkte)

2. Weiteres zur Stetigkeit von Maßen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für endliche Maße μ die Eigenschaft $A_n \downarrow A \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$ gilt. Sei μ ein beliebiges Maß, $A, A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ mit $A_n \downarrow A$ und es existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, sodass $\mu(A_n) < \infty$ für alle $n \geq n_0$ gilt. Zeige, dass

$$\lim_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(A)$$

gilt.

(6 Punkte)

3. Summen von Maßen.

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum mit einer Folge von Maßen $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Zeige, dass

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

ein Maß definiert. *(3 Punkte)*

b) Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum mit einer Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen $(\mathbb{P}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und einer Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von reelen Zahlen. Welche Forderung muss die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfüllen, sodass

$$\mathbb{P} := \sum_{i=1}^{\infty} c_i \mathbb{P}_i$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß definiert. Wenn $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, so nennt man die Summe auf der rechten Seite eine Mischung von Maßen. *(3 Punkte)*

4. Modellierung von Zufallsexperimenten.

Aus einer Menge von vier Kugeln werden zwei blind ausgewählt, wobei jede Kugel einer Zahl zwischen eins und vier entspricht.

(a) Modelliere einen diesem Experiment entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum. Gebe dazu eine Menge von Elementarereignissen Ω, eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an. *(2 Punkte)*

(b) Definiere und berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(i) Die Summe der Kugeln ist größer als 5. *(1 Punkt)*

(ii) Das Produkt der Kugeln ist ungerade. *(1 Punkt)*

(iii) Das Produkt der Kugeln ist gerade. *(1 Punkt)*

(iv) Die Kugel Nummer drei oder die Kugel Nummer 4 wird gezogen. *(1 Punkt)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag, den 6. Oktober 2020, 10:00 Uhr, in elektronischer Form abzugeben.