$X \sim Poi(\lambda)$, $Y \sim Poi(\beta)$ unabh. auf $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

mit $\lambda, \beta > 0$

Bel.: $X + Y \sim Poi(\beta + \lambda)$

Bew.: Hier mit Faltung.

Für X bzw. Y gilt für $k \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \text{und} \quad \mathbb{P}(Y = k) = e^{-\beta} \frac{\beta^k}{k!}.$$

Mit der diskreten Faltungsformel gilt dann

$$\mathbb{P}(X+Y=k) = \sum_{\ell=0}^{k} \mathbb{P}(X = k-\ell)\,\mathbb{P}(Y = \ell)$$

$$= \sum_{\ell=0}^{k} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{(k-\ell)}}{(k-\ell)!} \cdot e^{-\beta} \frac{\beta^\ell}{\ell!}$$

$$= e^{-\lambda} \cdot e^{-\beta} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{\lambda^{(k-\ell)}}{(k-\ell)!} \cdot \frac{\beta^\ell}{\ell!}$$

$$= e^{-(\lambda+\beta)} \sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{k!} \frac{\lambda^{(k-\ell)}}{(k-\ell)!} \frac{\beta^\ell}{\ell!}$$

$$= e^{-(\lambda+\beta)} \frac{1}{k!} \boxed{\sum_{\ell=0}^{k} \frac{k!}{(k-\ell)!\,\ell!} \lambda^{(k-\ell)} \beta^\ell \hat{=} \binom{k}{\ell}} \hat{=} (\lambda+\beta)^k$$

Nach dem binomischen Lehrsatz gilt

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} y^k$$

$$= e^{-(\lambda+\beta)} \frac{1}{k!} (\lambda+\beta)^k$$

$$= \boxed{e^{-(\lambda+\beta)} \frac{(\lambda+\beta)^k}{k!}} \left(= \mathbb{P}(X+Y=k) \text{ für } k \in \mathbb{N}_0\right)$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X+Y=k) = \mathbb{P}(Z=k) \; \forall k \in \mathbb{N}_0$ und $Z \sim \cancel{Exp(\lambda+\beta)}$ $Poi(\lambda+\beta)$

$$\mathbb{P}(Z=k) = e^{-(\lambda+\beta)} \frac{(\lambda+\beta)^k}{k!}$$

$\Rightarrow X + Y \sim Z$

$\Rightarrow X + Y \sim \cancel{Exp}$ Poi $(\lambda+\beta)$

Hinweis: Sei $G: [0,\infty) \to (0,\infty)$ stetig mit

$G(x+y) = G(x)G(y) \quad \forall x,y \geq 0$

$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: G(x) = e^{ax} \quad \forall x \geq 0$

Beh: $\exists \lambda > 0: X \sim Exp(\lambda) \Leftrightarrow X$ ist gedächtnislos $(\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq t) \; \forall s,t \geq 0)$ (und stetig)

Bew: Sei $\lambda > 0$ und $X \sim Exp(\lambda)$

„$\Rightarrow$": Für $s,t \geq 0$ gilt:

$$\mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s) = \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t, X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > s+t)}{\mathbb{P}(X > s)} = \frac{1 - F_X(s+t)}{1 - F_X(s)}$$

$$= \frac{1-(1-e^{-\lambda(s+t)})}{1-(1-e^{-\lambda s})} = \frac{e^{-\lambda s - \lambda t}}{e^{-\lambda s}}$$

$$= e^{-\lambda t} = 1 - F_X(t) = 1 - \underbrace{\mathbb{P}(X \leq t)}_{F_X(t)} = 1 - e^{-\lambda t}$$

$$= \mathbb{P}(X > t) = \mathbb{P}(X \geq t) \qquad = 1 - \mathbb{P}(X > t)$$

$\Rightarrow X$ ist gedächtnislos

„$\Leftarrow$": Sei nun X eine stetig verteilte Zufallsvariable mit $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$, die gedächtnislos ist. Also gilt:

$$\mathbb{P}(X \geq t) = \mathbb{P}(X \geq s+t \mid X \geq s)$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t, X \geq s)}{\mathbb{P}(X \geq s)} = \frac{\mathbb{P}(X \geq s+t)}{\mathbb{P}(X \geq s)}$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \geq t)\mathbb{P}(X \geq s) = \mathbb{P}(X \geq s+t)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X > t)\mathbb{P}(X > s) = \mathbb{P}(X > s+t)$$

Damit erfüllt die Abb. $G: [0,\infty) \to (0,\infty), t \mapsto \mathbb{P}(X > t)$ die Vorr. aus dem Hinweis der Aufgabe

$$\Rightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \mathbb{P}(X > t) = e^{at} \quad \forall t \geq 0$$

$\mathbb{P}(X \leq t)$

$$\Rightarrow F_X(t) = 1 - \mathbb{P}(X > t) = 1 - e^{at} \quad \forall t \geq 0$$

Zudem folgt $F_X(t) = 0 \quad \forall t \leq 0$, da $\mathbb{P}(X \leq 0) = 0$

$\Longrightarrow \exists a \in \mathbb{R}: \; F_X(t) = \mathbb{1}_{(0,\infty)}(t)\,(1 - e^{at})$

Nun setze $\lambda := -a$. Es bleibt z.z., dass $\lambda > 0$.

Wegen $e^{at} = \mathbb{P}(X > t) \in (0, 1] \;\; \forall t \geq 0$ $\qquad 1 - e^{0t} = 0$

folgt $a \leq 0 \Longleftrightarrow \lambda \geq 0$.

Angenommen es gelte $\lambda = 0$:

$\Longrightarrow F_X(t) = 0 \;\; \forall t \in \mathbb{R}$ ↯ $\Rightarrow F_X$ wäre keine VF.

Also gilt $\lambda > 0$.

Aus der Eindeutigkeit der Verteilungsfunktion folgt

$\exists \lambda > 0: X \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

$\square$

a) <u>Beh:</u> Paarweise Unabhängigkeit von Mengen impliziert nicht Unabhängigkeit.

<u>Bew:</u> Sei $\Omega = \{112, 121, 211, 122\}$, $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}: \mathcal{A} \to [0,1], A \mapsto \frac{|A|}{4}$

Dann ist $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein W-Raum

Seien $A_1 := \{112, 121\}$, $A_2 := \{211, 112\}$, $A_3 = \{211, 121\}$.

Dann gilt $A_i \in \mathcal{A}$ und $\mathbb{P}(A_i) = \frac{1}{2}$ $\forall i \in \{1,2,3\}$ und

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2) = \mathbb{P}(\{112\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)$$

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_3) = \mathbb{P}(\{121\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_3)$$

$$\mathbb{P}(A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\{211\}) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ sind paarweise unabhängig

Es gilt aber

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \neq \frac{1}{8} = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\mathbb{P}(A_3)$$

$\Rightarrow A_1, A_2, A_3$ sind nicht unabhängig

b) $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ W-Raum, $A, B \in \mathcal{A}$

i) <u>Beh:</u> $\mathbb{P}(A) \in \{0,1\} \Rightarrow A, B$ unab.

<u>Bew:</u> Sei $\mathbb{P}(A) = 0$.

$A \cap B \subseteq A$

$\Rightarrow 0 \leq \mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(A) = 0$

$\Rightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = 0 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ unab.

Sei $\mathbb{P}(A) = 1$.

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cup B)$$

, da $A \cup B \subseteq \Omega$ $\Rightarrow \mathbb{P}(A \cup B) \leq \mathbb{P}(\Omega)$

$$\geq \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(\Omega)$$

$$= 1 + \mathbb{P}(B) - 1 = \mathbb{P}(B)$$

Zusätzlich gilt auch immer $\mathbb{P}(A \cap B) \leq \mathbb{P}(B)$, damit folgt

$A \cap B \subseteq B$

$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) \Rightarrow A, B$ unab.

ii) Bel: A, B unab. $\Rightarrow A^c, B$ unab.

Bew: Seien A, B unab. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A^c \cap B) &= \mathbb{P}(B \setminus A) \\ &= \mathbb{P}(B \setminus (A \cap B)) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B) \\ &= \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B) \\ &= \mathbb{P}(B)(1 - \mathbb{P}(A)) = \mathbb{P}(B)\mathbb{P}(A^c) \end{aligned}$$

$\Rightarrow A^c, B$ sind unabhängig.

c) Bel: X, Y, Z paarweise unab. ZV's $\not\Rightarrow X, Y, Z$ unab. ZV's

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ wie in a) und seien

$X(\omega) = \mathbb{1}_{A_1}(\omega)$, $Y(\omega) = \mathbb{1}_{A_2}(\omega)$, $Z(\omega) = \mathbb{1}_{A_3}(\omega)$ $\forall \omega \in \Omega$

$\Rightarrow X, Y, Z$ sind $\mathcal{A}-\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar, da $A_i \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \{1,2,3\}$

$\Rightarrow X, Y, Z$ sind ZV's.

Also gilt für X, Y, Z und $t \in \mathbb{R}$:

$$X^{-1}((-\infty, t]) = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ A_1^c, & 0 \le t < 1 \\ \Omega, & 1 \le t \end{cases}$$

$$Y^{-1}((-\infty, t]) = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ A_2^c, & 0 \le t < 1 \\ \Omega, & 1 \le t \end{cases}$$

$$Z^{-1}((-\infty, t]) = \begin{cases} \emptyset, & t < 0 \\ A_3^c, & 0 \le t < 1 \\ \Omega, & 1 \le t \end{cases}$$

$\mathbb{P}(\emptyset)=0$ und $\mathbb{P}(\Omega)=1$ und die A_i paarweise unab. sind,

sind auch $X^{-1}((-\infty,t_1])$, $Y^{-1}((-\infty,t_2])$ und $Z^{-1}((-\infty,t_3])$

paarweise unab. $\forall t_1,t_2,t_3 \in \mathbb{R}$.

Es gilt aber:

$$
\begin{aligned}
F_{(X,Y,Z)}(0,0,0) &= \mathbb{P}(X\leq 0,\ Y\leq 0,\ Z\leq 0)\\
&= \mathbb{P}(A_1^c \cap A_2^c \cap A_3^c)\\
&= \mathbb{P}(\{2222\}) = \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

und
$$
\begin{aligned}
F_X(0)F_Y(0)F_Z(0) &= \mathbb{P}(X\leq 0)\,\mathbb{P}(Y\leq 0)\,\mathbb{P}(Z\leq 0)\\
&= \mathbb{P}(A_1^c)\,\mathbb{P}(A_2^c)\,\mathbb{P}(A_3^c)\\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow X, Y, Z$ sind paarweise unab. aber nicht unab.

$\alpha > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von ZV mit $X_1 = 1$,

$\mathbb{P}(X_n = 1) = 1 - \frac{1}{n^\alpha}$, $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n^\alpha}$ $\forall\, n \geq 2$

a) Ges: Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch gegen 1?

Lsg: Sei $\varepsilon > 0$. Dann gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) = \begin{cases} 0, & n-1 \leq \varepsilon \\ \frac{1}{n^\alpha}, & n-1 > \varepsilon \end{cases} = \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{1}_{(0,n-1)}(\varepsilon)$$

Also gilt:

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen 1

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(|X_n - 1| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} \mathbb{1}_{(0,n-1)}(\varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall\, \varepsilon > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n^\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha > 0.$$

b) Ges: Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen 1? (Für $p \geq 1$)

Lsg: Sei $p \geq 1$. Dann gilt

$$\mathbb{E}[|X_n - 1|^p] = |n-1|^p\, \mathbb{P}(X_n = n) + |1-1|^p\, \mathbb{P}(X_n = 1)$$
$$= \frac{(n-1)^p}{n^\alpha} \quad \forall\, n \geq 2$$

Also gilt:

$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - 1|^p] = 0 \Leftrightarrow \alpha > p$, denn

„$\Leftarrow$": $\frac{(n-1)^p}{n^\alpha} \leq \frac{n^p}{n^\alpha} = n^{p-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} 0$, da $\alpha > p$

„$\Rightarrow$": Angenommen $\alpha \leq p$, dann ist für $n \geq 2$

$$\frac{(n-1)^p}{n^\alpha} \geq \frac{\left(\frac{n}{2}\right)^p}{n^\alpha} = \left(\frac{1}{2}\right)^p n^{p-\alpha}$$

und $\left(\frac{1}{2}\right)^p n^{p-\alpha} \xrightarrow{n\to\infty} \infty$, falls $\alpha < p$

und $\left(\frac{1}{2}\right)^p \neq 0$, falls $\alpha = p$.

c) <u>Ges</u>: Für welche $\alpha > 0$ konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen 1?

<u>Lsg</u>: Da in a) bereits gezeigt wurde, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall \alpha > 0$ stochastisch gegen 1 konvergiert, folgt aus dem Zusammenhang von Konvergenzen von Folgen von ZU's (Satz 4.5.11), dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ $\forall \alpha > 0$ in Verteilung gegen 1 konvergiert.

$X \sim \mathcal{N}(0,1)$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von ZV mit

$X_n = (-1)^n X \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) <u>Bel:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in Verteilung gegen X

<u>Bew:</u> Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$. Dann gilt für $n \in \{n\in\mathbb{N} : \exists k\in\mathbb{N} : 2k = n\}$

$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f((-1)^n X)] = \mathbb{E}[f(X)]$ und

für $n \in \{n\in\mathbb{N} : \exists k \in\mathbb{N} : 2k+1 = n\}$

$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(-X)]$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(-x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx$$

Subs: $y = -x$ ~~$y = x$~~

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(-y)^2}{2}}\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

$$= \mathbb{E}[f(X)]$$

$$\int_{\mathbb{R}} \underbrace{|f(x)|}_{\leq M} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \leq M \underbrace{\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{=1} = M$$

$\mathbb{E}[|f(X)|]$ ex.

Die Integrale existieren, da $f \in C_b(\mathbb{R})$ und zusammen gilt

$\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)]$ und da $f \in C_b(\mathbb{R})$ bel. war

konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X.

b) <u>Bel:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht stochastisch gegen X.

<u>Bew:</u> Sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $n \in \{n\in\mathbb{N} : \exists k\in\mathbb{N} : n = 2k+1\}$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|-2X| > \tfrac{1}{2})$$

$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$= \mathbb{P}(|X| > \tfrac{1}{4})$$

$$= \mathbb{P}_X\big((-\infty, -\tfrac{1}{4}) \,\dot\cup\, (\tfrac{1}{4}, \infty)\big)$$

$$= \mathbb{P}_X((-\infty, -\tfrac{1}{4})) + \mathbb{P}_X((\tfrac{1}{4}, \infty))$$

$\mathbb{P}_X(B) = \int_B f(x)\, dx$

$$= \underbrace{\int_{-\infty}^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{>0} + \underbrace{\int_{\frac{1}{4}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{>0}$$

beide Terme sind jeweils strikt positive Konstanten die nicht von n abhängen.

$\Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{1}{2}) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} 0$

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht stochastisch gegen X.

c) Beh: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht fast sicher gegen X.

Bew: Sei $A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) > \frac{1}{4}\}$. Dann gilt, ähnlich wie in b), $\mathbb{P}(A) = c > 0$ und $X(\omega) \neq -X(\omega)\ \forall \omega \in A$.

$\Rightarrow X_n(\omega) \neq X(\omega)\ \forall \omega \in A,\ n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N}: 2k+1 = n\}$

$\Rightarrow X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\longrightarrow} X(\omega)\ \forall \omega \in A$

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht fast sicher gegen X, da $\mathbb{P}(A) > 0$ und $\{\omega \in \Omega \mid \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \supseteq A$ keine Nullmenge ist.

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) = X(\omega)\}) = 1$$

$$\mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\}) = 0$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(X > \tfrac{1}{4}) = \mathbb{P}_X((\tfrac{1}{4}, \infty)) = \int_{\frac{1}{4}}^{\infty} f(x)\,dx$$