

Stochastik I

4. Große Übung

Martin Dattge, Leonardo Vela

21.10.2020

Definition

Sei \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von \mathbb{P} .

- Es gilt:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a)$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Erinnerung: Allgemeine Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

- i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- ii) F ist monoton steigend,
- iii) F ist rechtsseitig stetig,
- iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt heißt **Verteilungsfunktion**.

- Jede Verteilungsfunktion korrespondiert mit genau einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. (Carathéodory+Vorlesung)

Aufgabe 1

Sei \mathbb{P} ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion F .

Wann gilt

$$\mathbb{P}((a, b)) = \mathbb{P}((a, b]), \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}([a, b]) = \mathbb{P}((a, b])$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$?

Wie hängt das mit F zusammen?

Wie lassen sich

$$\mathbb{P}((a, \infty)), \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}([a, \infty))$$

durch F berechnen?

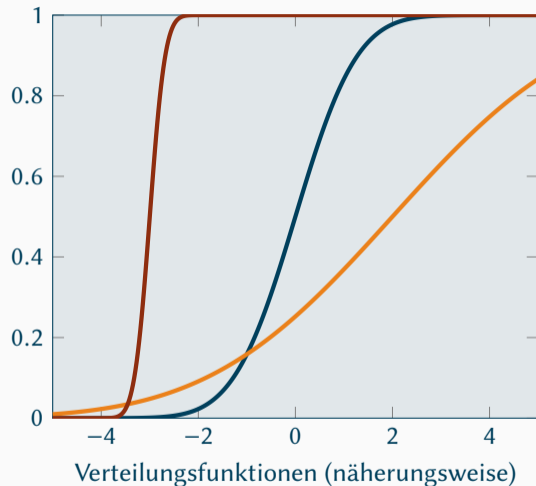
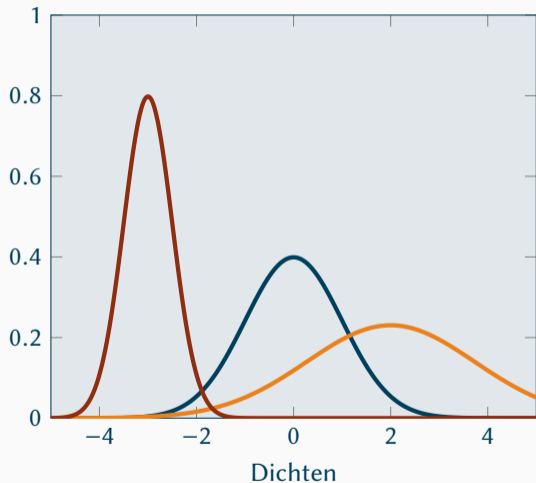
Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx.$$

Welchen Einfluss haben die beiden Parameter μ und σ ?

- Die Normierungseigenschaft für Wahrscheinlichkeitsmaße wurde in der letzten Übung für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ gezeigt, der allgemeine Fall folgt per Substitution.

Die Normalverteilung ($\mu = -3, \sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0, \sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2, \sigma^2 = 3$ Orange)



Aufgabe 2

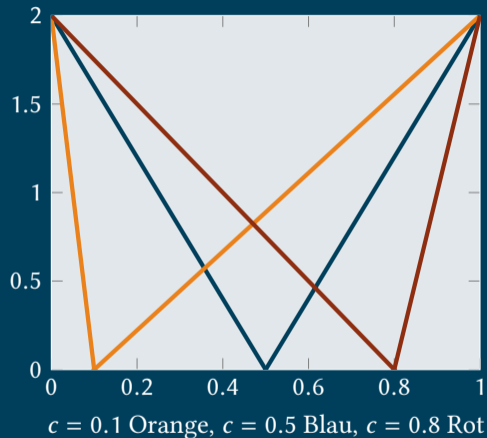
Sei für $c \in (0, 1)$ die Dichtefunktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

$$x \mapsto 2 \left(1 - \frac{1}{c}x\right) \mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2 \left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right) \mathbb{1}_{(c,1]}(x)$$

gegeben.

Berechne die Verteilungsfunktion von f .



Dichten vs. Verteilungsfunktionen ($c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot)

