Stochastik I

3. Große Übung

Martin Dattge, Leonardo Vela

14.10.2020

Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Funktion

$$F \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \longmapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

ii) F ist monoton steigend,

iii) F ist rechtsseitig stetig,

iv) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt heißt Verteilungsfunktion.

- Auf dem Übungsblatt habt Ihr gezeigt, dass jede Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes diese vier Eigenschaften erfüllt.
- Es lässt sich zeigen (siehe Vorlesung), dass jede Verteilungsfunktion nach obiger Definition mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ korrespondiert.

Aufgabe 1

Sei

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x),$$

eine stetige (stetig ist i.A. nicht nötig) und integrierbare Funktion, die die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,
ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

erfüllt. Zeige, dass

$$F(t) := \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion ist.

Dichte der Standard-Normalverteilung

Ein Beispiel für eine stetige und integrierbare Funktion f, welche die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,
ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$,

erfüllt, ist die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

aber wie zeigt man, dass Eigenschaft ii) erfüllt ist?

Aufgabe 2

Berechne die Verteilungsfunktionen der folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\begin{aligned}
\mu_1 &:= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_k, \\
\mu_2 &:= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \qquad p \in (0,1), n \in \mathbb{N}, \\
\mu_3 &:= p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n, \qquad p \in (0,1).
\end{aligned}$$

Was bedeutet es, wenn eine Verteilungsfunktion in einem Punkt unstetig ist?