Stochastik I

2. Große Übung

Martin Dattge und Leonardo Vela

07.10.20

Die Borelsche σ-Algebra

Definition

Sei die Grundmenge $\Omega = \mathbb{R}$ gegeben und $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von Ω. Dann heißt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$$

die Borelsche σ-Algebra der reellen Zahlen.

- Die Borelsche σ-Algebra ist also die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält.
- Trotz dieser Definition, hat die Borelsche σ-Algebra viele verschiedene Erzeuger.

Aufgabe 1

Zeige, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\mathcal{E}_1 := \{K \subseteq \mathbb{R} : K \text{ kompakt}\},$$
$$\mathcal{E}_2 := \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\},$$
$$\mathcal{E}_3 := \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\}.$$

Die Borelsche σ-Algebra der erweiterten Zahlengerade

Definition

Für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ nennt man

$$\bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$$

die erweiterte Zahlengerade der reellen Zahlen.

- Wir wollen später auch Ereignisse modellieren für die die Auszahlung den Wert $-\infty$ oder ∞ annehmen kann.
- Dafür müssen wir das Konzept der Borelschen σ-Algebra auf die erweiterte Zahlengerade ausweiten.

Aufgabe 2

Charakterisiere die Menge $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$.

Dynkin-Systeme vs. σ-Algebren

Definition (Dynkin-System)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{D}$ heißt Dynkin-System (über Ω), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{D}$,

(ii) $A \in \mathcal{D} \implies A^C \in \mathcal{D}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{D}$ paarweise disjunkt $\implies \dot{\bigcup}_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{D}$.

Definition (σ-Algebra)

Sei Ω eine nichtleere Menge. Ein Mengensystem $\mathcal{A}$ heißt σ-Algebra (über Ω), falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A} \implies A^C \in \mathcal{A}$,

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$.

Aufgabe 3

Sei $n \in \mathbb{N}$ eine gerade Zahl und

$$\mathcal{D} = \{A \subseteq \mathbb{N} \mid \#(A \cap \{1, \dots, n\}) \text{ gerade oder } 0\}.$$

a) Zeige, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System (über $\mathbb{N}$) ist.

b) Ist $\mathcal{D}$ auch eine σ-Algebra (über $\mathbb{N}$)?