Stochastik I

1. Große Übung

Leonardo Vela, Martin Dattge

30. September 2020

Administratives

- VL Download Link auf Website.
- Große Übung und Tutorien
    - Es wird nichts aufgezeichnet (Datenschutz).
    - Slides der GÜ und Notizen der Tutoren der werden hochgeladen.
    - Auf Zoom: Vorlesungswiederholung, donnerstags B5 **oder** freitags B2/B4 (ab 08./09.10.),
    - Auf Zoom: Tipps zum Übungsblatt, freitags, B3 (ab 02.10.).
    - Tutorien in Präsenz: Vorlesungswiederholung, montags, B4 (ab 05.10.), Zusätzliche Aufgaben, montags, B2 (05.10.), Auseinandernehmen eines fiesen Beweises, mittwochs, B3 (ab 07.10.)
    - Zoom Räume und normale Räume auf Website

$\Longrightarrow$ schreibt uns ganz formlos, falls ihr Wünsche oder Anregungen habt!

Administratives

- Übungsblätter
  - ÜB Abgabe in Briefkästen mit Namen oder als PDF-File mit File-Name Nachname1_Nachname2_BlattNr. in ILIAS
  - Ab zweiter Woche bekommt ihr einen Tutor zugewiesen, in dessen Briefkasten ihr die Blätter einwerfen sollt (falls ihr Print abgebt).
  - Abholung der Print Übungsblätter im dritten Stock von B6, Bauteil A

σ-Algebra

Definition

Sei Ω nicht leer. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra, falls

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$, das nennt man auch stabil (oder abgeschlossen) unter Komplementbildung,
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$, das nennt man auch stabil (oder abgeschlossen) unter abzählbarer Vereinigung.

Elemente von $\mathcal{A}$ heißen **messbare Mengen**. Ist $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ und $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sind σ-Algebren, so nennt man $\mathcal{A}$ Unter-σ-Algebra von $\mathcal{B}$.

Aufgabe 1

a) Sei $\Omega = \{1, 2, 3\}$ und $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{1, 2\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$. Ist $\mathcal{A}$ eine σ-Algebra über Ω ?

b) Zeige oder widerlege, dass die Vereinigung von zwei σ-Algebren wieder eine σ-Algebra ist.

Maß

Definition

Für eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ heißt $\mu\colon \mathcal{A} \longrightarrow [0,\infty]$ ein **Maß auf** $\mathcal{A}$, falls folgende Eigenschaften gelten:

1. $\mu(\emptyset) = 0$
2. Sind $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkte Mengen, so gilt $\mu(\dot{\bigcup}_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A)$. Wir nennen diese Eigenschaft σ-Additivität.

Ein Maß μ heißt **endlich**, falls $\mu(\Omega) < \infty$. μ heißt **Wahrscheinlichkeitsmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$.

Aufgabe 2

Betrachte den messbaren Raum $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, $p \in (0,1)$ und δ_k das Dirac-Maß.
Definiere die Abbildung

$$\mu : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \longrightarrow \mathbb{R}, A \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \delta_k(A) \cdot (1-p)^{k-1} \cdot p.$$

a) Zeige (bzw. wiederhole), dass das Dirac-Maß ein Maß ist.

b) Zeige, dass μ ein Maß ist.

c) Ist μ ein endliches Maß?