Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

Stochastik I

13. Übung

1. Mehr zum schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{E}[X_n^2] < \infty, \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad \text{und} \quad \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{V}(X_k) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Zeige

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathbb{E}[X_k]) \underset{n\to\infty}{\overset{P}{\longrightarrow}} 0.$$

(10 Punkte)

2. Limes superior und inferior von Mengenfolgen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen in $\mathcal{A}$. Zeige:

a) $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$. *(3 Punkte)*

b) $(\liminf_{n\to\infty} A_n)^C = \limsup_{n\to\infty} A_n^C$. *(3 Punkte)*

c) $\liminf_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\liminf_{n\to\infty} A_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$. *(4 Punkte)*

d) $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{1}_{A_n}(\omega) = \mathbb{1}_{\limsup_{n\to\infty} A_n}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega$. *(4 Punkte)*

3. Konvergenz, Konvergenz, Konvergenz.

Sei $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ auf dem zusätzlich die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Zufallsvariablen gegeben sei mit

$$X_n = (-1)^n Y \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

In welchem Sinne konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Y und in welchem nicht? *(6 Punkte)*

4. Konvergenz, Konvergenz, Konvergenz, Konvergenz, Konvergenz.

Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise unabhängigen Zufallsvariablen mit

$$\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n^p}, \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^p},$$

für ein $p \geq 0$. Zeige

$$X_n \underset{n\to\infty}{\overset{\text{f.s.}}{\longrightarrow}} 0 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1.$$

(10 Punkte)

Und hier noch ein paar Zusatzaufgaben zur Ablenkung von Numerik. ☺

5. Zusatzaufgabe: Fast sichere Eindeutigkeit von Limites in Wahrscheinlichkeit.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen X, Y und die Folge von Zufallsvariablen $(X_n)_n \in \mathbb{N}$ gegeben seien. Zeige die folgenden Aussagen:

a) Für alle $\epsilon > 0$ gilt

$$\{X + Y > \epsilon\} \subseteq \left\{X > \frac{\epsilon}{2}\right\} \cup \left\{Y > \frac{\epsilon}{2}\right\}.$$

(10 Zusatzunkte)

b) Falls

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} X \quad \text{und} \quad X_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} Y,$$

gilt, folgt

$$\mathbb{P}(X = Y) = 1.$$

(20 Zusatzpunkte)

6. Zusatzaufgabe: Das starke Gesetz der großen Zahlen mit zweiten Momenten?

Was läuft beim Beweis des starken Gesetzes der großen Zahlen schief, wenn man ihn mit zweiten Momenten durchführt (anstatt mit vierten)? *(30 Zusatzpunkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 03. Dezember 2019, 18:00 Uhr, in den Briefkasten eures Tutors in A5 einzuwerfen.