FAKULTÄT FÜR WIRTSCHAFTSINFORMATIK
UND WIRTSCHAFTSMATHEMATIK

UNIVERSITÄT
MANNHEIM

Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

Stochastik I

9. Übung

1. Fußball ist unser Leben.

Die Anzahl der Tore in einem Spiel der Fußball-Bundesliga sei Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = 3.2$. Berechne die Wahrscheinlichkeit der Ereignisse

$$A \mathrel{\widehat{=}} \text{“Es fallen keine Tore”},$$
$$B \mathrel{\widehat{=}} \text{“Es fallen mehr als 5 Tore”}.$$

(5 Punkte)

2. Summen sind auch nur Integrale.

Sei $f\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$ eine positive, messbare Funktion. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}, p \geq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^{n} f(k)\right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^{n} f(k)^p.$$

(8 Punkte)

3. Die Gamma-Verteilung.

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}_X(B) = \int_B \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\,\mathrm{d}x, \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

für $\alpha, \beta > 0$. Dann heißt X eine Gamma-verteilte Zufallsvariable und man schreibt

$$X \sim \Gamma(\alpha, \beta).$$

Berechne den Erwartungswert, die Varianz und die momenterzeugende Funktion von X.

(10 Punkte)

Hinweis: Hierbei bezeichnet

$$\Gamma\colon (0,\infty) \to (0,\infty), \quad x \mapsto \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\,dt.$$

die Gammafunktion. Für diese gilt insbesondere $\Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha), \alpha > 0$.

4. Minkowski für Reihen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $p \geq 1$. Zeige, dass

$$\left(\int_\Omega \Big|\sum_{n=1}^\infty f_n\Big|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} \leq \sum_{n=1}^\infty \left(\int_\Omega |f_n|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$$

gilt.

(10 Punkte)

5. Eindeutigkeit von Grenzwerten in L^p (nicht $\mathcal{L}^p$!).

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit $p \geq 1$, sodass

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - g|^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

für Funktionen $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$. Zeige, dass

$$f = g \quad \mu\text{-fast überall}$$

gilt und folgere, dass Grenzwerte von Folgen in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eindeutig sind.

(7 Punkte)

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 5. November 2019, 18:00 Uhr, in den Briefkasten eures Tutors in A5 einzuwerfen.