Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

7. Übung

1. Eine weder diskrete noch stetige Verteilungsfunktion.

Sei die Verteilungsfunktion

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad x \mapsto \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda x}\right)\right) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

mit $\lambda > 0$ gegeben. Skizziere zunächst F und bestimme dann das mit F korrespondierende Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}_F$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und dessen Erwartungswert. *(5 Punkte)*

2. Erwartungswerte, Erwartungswerte, Erwartungswerte.

Seien $\lambda \geq 0, n \in \mathbb{N}, c \in (0,1)$ und der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ versehen mit den Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathbb{P}_1(B) := \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k(B), \quad \mathbb{P}_2(B) := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k(B),$$

$$\mathbb{P}_3(B) := \int_B \left(2\left(1 - \frac{1}{c}x\right) \mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right) \mathbb{1}_{(c,1]}(x)\right) \mathrm{d}x,$$

für $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gegeben.

a) Berechne die k-ten Momente von $\mathbb{P}_3$ für $k \in \mathbb{N}$ und bestimme die Erwartungswerte aller gegebenen Wahrscheinlichkeitsmaße. *(5 Punkte)*

b) Berechne die exponentiellen Momente von $\mathbb{P}_1$ und $\mathbb{P}_2$. *(5 Punkte)*

3. Konzentrationsungleichungen.

In dieser Aufgabe werdet Ihr die in Aufgabe 2 von Blatt 4 verwendete Ungleichung beweisen. Sei dazu der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben und darauf das Maß μ und das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ mit $\sigma > 0$.

a) Zeige, dass jede monotone Funktion $f\colon (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist. *(3 Punkte)*

b) Zeige, dass für eine monoton wachsende, nichtnegative Funktion $h\colon \mathbb{R} \to [0,\infty)$

$$h(a)\mu([a,\infty)) \leq \int_{\mathbb{R}} h \,\mathrm{d}\mu$$

für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt.
Hinweis: In der Vorlesung habt ihr diese Ungleichung für $h(x) = x^{2k}$ mit $k \in \mathbb{N}$ gezeigt.
(5 Punkte)

c) Zeige, dass für $a > 0$

$$\mathbb{P}((-a,a)^C) \leq 2\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\sigma^2\beta^2}}{\mathrm{e}^{\beta a}}$$

für alle $\beta \geq 0$ gilt.

Hinweis: Schaut euch nochmal das letzte Übungsblatt an (insbesondere die Lösungen). *(3 Punkte)*

d) Folgere aus c), dass für $a > 0$

$$\mathbb{P}((-a,a)^C) \leq 2\mathrm{e}^{-\frac{a^2}{2\sigma^2}}$$

gilt und dies die obere Schranke aus c) minimiert.

Hinweis: Wenn es um Minima und Maxima geht, hilft Ableiten oft weiter. *(3 Punkte)*

4. Ein Gegebenbeispiel zum DCT.

Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Funktionen mit

$$f_n : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})), \quad x \mapsto \frac{1}{2n}\mathbb{1}_{(n^2-n,n^2+n)}(x),$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig (und damit insbesondere punktweise) gegen eine messbare Funktion konvergiert, aber

$$\int_{\mathbb{R}} \lim_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\lambda \neq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n \,\mathrm{d}\lambda$$

gilt.

Hinweis: λ bezeichnet hier wieder das Lebesgue-Maß. *(3 Punkte)*

b) Zeige, dass für $m < n \in \mathbb{N}$

$$n^2 - n \geq m^2 + m$$

gilt und folgere daraus, dass eine Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$|f_n| \leq g \text{ für alle } n \in \mathbb{N}$$

genau dann erfüllt, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \leq g$$

gilt. *(5 Punkte)*

c) Folgere aus b), dass a) dem Satz der dominierten Konvergenz nicht widerspricht. *(3 Punkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 22. Oktober 2019, 18:00 Uhr, in den Briefkasten eures Tutors in A5 einzuwerfen.