Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

Stochastik I

6. Übung

1. Nullmengen und Monotonie des Lebesgue-Integrals.

Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, eine Folge von μ-Nullmengen $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und μ-integrierbare Funktionen

$$f, g\colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$$

gegeben. Zeige:

a) $\bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$ ist auch eine μ-Nullmenge. *(2 Punkte)*

b) $f \leq g \implies \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

c) $f \leq g$ μ-fast überall $\implies \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$. *(3 Punkte)*

Hinweis: Schaut euch den Beweis des Satzes der Monotonen Konvergenz an für Aufgabe c).

2. Monotone Konvergenz und Reihen.

Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ und eine Folge nichtnegativer messbarer Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$f_n\colon \Omega \to [0, \infty]$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gegeben. Zeige, dass

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu$$

gilt. *(5 Punkte)*

3. Integrierbarkeit positiver Funktionen bezüglich endlicher Maße.

Seien ein Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ mit einem endlichen Maß μ und eine positive, messbare, numerische Funktion

$$f\colon \Omega \to [0, \infty]$$

gegeben. Zeige:

a) Wenn f nur Werte in $\mathbb{N}_0$ annimmt, gilt

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}).$$

(3 Punkte)

b) Die Funktion f (nicht notwendigerweise ganzzahlig) ist genau dann μ-integrierbar, wenn

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(\{f \geq n\}) < \infty$$

gilt. Was geht schief, wenn μ kein endliches Maß ist? *(4 Punkte)*

Hinweis: Die Aufgaben 1 und 2 sind bei dieser Aufgabe sehr hilfreich.

4. Erwartungswerte, Momente und exponentielle Momente.

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ und das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$\mathbb{P}_1 := p\delta_1 + (1-p)\delta_0$$

gegeben. Dann heißt $\mathbb{P}_1$ Bernoulli-Verteilung mit Parameter $p \in (0,1)$ (kurz $\mathbb{P}_1 = \mathrm{Ber}(p)$). Seien zudem $\mathbb{P}_2$ die Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda > 0$ (kurz $\mathbb{P}_2 = \mathrm{Exp}(\lambda)$), $\mathbb{P}_3$ die Gleichverteilung auf dem Intervall $[a,b]$ mit $a < b \in \mathbb{R}$ (kurz $\mathbb{P}_3 = \mathcal{U}([a,b])$), $\mathbb{P}_4$ die Normalverteilung mit Parameter $\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$ (kurz $\mathbb{P}_4 = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$) und $\mathbb{P}_5$ die Cauchy-Verteilung mit Parameter $s > 0, t \in \mathbb{R}$ (kurz $\mathbb{P}_5 = \mathrm{Cauchy}(s,t)$).

a) Berechne (und begründe warum sie existieren) den Erwartungswert und die k-ten Momente von $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2, \mathbb{P}_3$ für alle $k \in \mathbb{N}$, also

$$\int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}_i(x), \quad \int_{\mathbb{R}} x^k \, \mathrm{d}\mathbb{P}_i(x),$$

für $i = 1, 2, 3$. *(8 Punkte)*

Hinweis: Zeigt per vollständiger Induktion mit partieller Integration, dass $\int_{\mathbb{R}} x^k \, d\mathbb{P}_2 = \frac{k!}{\lambda^k}$ *gilt.*

b) Berechne die exponentiellen Momente von $\mathbb{P}_4$, also

$$\int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{\beta x} \, \mathrm{d}\mathbb{P}_4(x)$$

für $\beta \in \mathbb{R}$. *(4 Punkte)*

Hinweis: Quadratische Ergänzung.

c) Warum ist der Erwartungswert von $\mathbb{P}_5$ nicht definiert? *(4 Punkte)*

d) Berechne die exponentiellen Momente von $\mathbb{P}_2$. Für welche β sind diese endlich? *(4 Punkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 15. Oktober 2019, 18:00 Uhr, in den Briefkasten eures Tutors in A5 einzuwerfen.