Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

Stochastik I

4. Übung

1. Das Lebesgue-Maß auf einem Intervall.

a) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathcal{A}$. Zeige, dass

$$\mathcal{A} \cap A := \{A \cap B : B \in \mathcal{A}\}$$

eine σ-Algebra über A definiert und

$$\mu_A(C) := \mu(A \cap B), \quad C = A \cap B \in \mathcal{A} \cap A,$$

ein Maß auf dem messbaren Raum $(A, \mathcal{A} \cap A)$ ist.

(5 Punkte)

b) Begründe, dass für $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b]})$ ein Maßraum ist, wobei

$$\mathcal{B}([a,b]) := [a,b] \cap \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Wann ist dies ein Wahrscheinlichkeitsraum?
Hinweis: λ bezeichnet hierbei, wie üblich, das Lebesgue-Maß.

(1 Punkte)

c) Sei $([a,b], \mathcal{B}([a,b]), \lambda_{[a,b]})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, wie in b). Sei nun die Abbildung

$$\lambda(\cdot \cap [a,b]) \colon \mathcal{B}(\mathbb{R}) \to [0,1], \quad B \mapsto \lambda(B \cap [a,b])$$

auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben. Zeige, dass diese ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, berechne ihre Verteilungsfunktion und zeige, dass $\lambda(\cdot \cap [a,b])_{|\mathcal{B}([a,b])} = \lambda_{[a,b]}$ gilt.

(3 Punkte)

2. Verteilung der Masse der Normalverteilung.

Sei das Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P} = \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben. Für welche σ lässt sich aus der Ungleichung (die wir bald selbst beweisen werden)

$$\int_r^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \,\mathrm{d}x \leq \mathrm{e}^{-\frac{r^2}{2\sigma^2}}, \quad r \geq 0,$$

folgern, dass

$$\mathbb{P}([-1,1]) \geq 0,99$$

gilt?
Hinweis: Überlegt euch, warum man mit der obigen Ungleichung auch $\mathbb{P}((-\infty, 1))$ abschätzen kann. Die allgemeine Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ wurde in der großen Übung definiert.

(5 Punkte)

3. Eigenschaften messbarer Funktionen.

Seien die messbaren Räume $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}'), (\Omega'', \mathcal{A}'')$ und die messbaren Funktionen

$$f\colon \Omega \to \Omega', \quad g\colon \Omega' \to \Omega''$$

gegeben.

a) Zeige, dass $g \circ f$ $\mathcal{A}$-$\mathcal{A}''$-messbar ist.

(2 Punkte)

b) Zeige, dass $\sigma(f) := \{f^{-1}(A) : A \in \mathcal{A}'\}$ die kleinste σ-Algebra ist, bezüglich der f messbar ist.

(5 Punkte)

c) Sei $A \in \mathcal{A}$. Bestimme $\sigma(\mathbb{1}_A)$, wobei

$$\mathbb{1}_A\colon \Omega \to \{0,1\}, \quad \omega \mapsto \mathbb{1}_a(\omega) := \begin{cases} 1 : \omega \in A \\ 0 : \omega \notin A \end{cases} .$$

(2 Punkte)

4. Der Vektorraum der messbaren Funktionen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum. Zeige, dass für $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen

$$f\colon \Omega \to \mathbb{R}, \quad g\colon \Omega \to \mathbb{R}$$

und $\alpha \in \mathbb{R}$ auch

$$\alpha f, f+g, f-g, f \cdot g$$

$\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Funktionen sind. Folgere daraus, dass der Raum der $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbaren Funktionen ein Vektorraum ist.

Hinweis: Addition und Multiplikation sind hier punktweise zu verstehen, also zum Beispiel $(f+g)(\omega) = f(\omega) + g(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$.

(7 Punkte)

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 01. Oktober 2019, 18:00 Uhr, in den Briefkasten eures Tutors in A5 einzuwerfen.