Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

Stochastik I

3. Übung

1. Der Ring der endlichen Mengen.

Seien

$$\mathcal{E} \coloneqq \{E \subseteq \mathbb{R} : E \text{ endlich}\}$$

und

$$\mu\colon \mathcal{E} \to [0,\infty], \quad E \mapsto 0,$$

gegeben.

a) Zeige, dass $\mathcal{E}$ ein Ring ist und bestimme $\sigma(\mathcal{E})$. *(3 Punkte)*

b) Zeige, dass es unendlich viele verschiedene Fortsetzungen von μ zu Maßen auf $\sigma(\mathcal{E})$ gibt. Warum ist dies kein Widerspruch zu Korollar 1.2.13. bzw. Satz 1.3.13.? *(4 Punkte)*

2. Das Zählmaß auf den rationalen Zahlen.

Sei für $a, b \in \mathbb{Q}$ mit $a < b$,

$$(a,b]_{\mathbb{Q}} \coloneqq \{q \in \mathbb{Q} : a < q \leq b\}$$

und $\mathcal{A}_0$ die kleinste Algebra über $\mathbb{Q}$, die das Mengensystem

$$\mathcal{E} \coloneqq \{(a,b]_{\mathbb{Q}} : a, b \in \mathbb{Q}, a < b\}$$

enthält. Sei des Weiteren die σ-Algebra $\mathcal{A} \coloneqq \sigma(\mathcal{A}_0)$ über $\Omega = \mathbb{Q}$ gegeben.

a) Zeige, dass $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{Q})$ gilt. *(3 Punkte)*

b) Sei μ das Zählmaß auf $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$, also

$$\mu\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to [0,\infty], \quad A \mapsto \#A.$$

Zeige, dass μ auf $\mathcal{A}$ σ-endlich ist, aber auf $\mathcal{A}_0$ nicht. *(3 Punkte)*

c) Sei λ ein Maß auf $(\mathbb{Q}, \mathcal{P}(\mathbb{Q}))$ mit

$$\lambda\colon \mathcal{P}(\mathbb{Q}) \to [0,\infty], \quad A \mapsto 2\#A.$$

Zeige, dass

$$\lambda(A) = \mu(A)$$

für alle $A \in \mathcal{A}_0$ gilt, dies jedoch nicht für alle Mengen $A \in \mathcal{A}$ erfüllt ist. *(3 Punkte)*

3. Diskrete Verteilungsfunktionen.

Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von nichtnegativen reellen Zahlen, sodass

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$$

erfüllt ist. Zeige, dass die Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto \sum_{n=1}^{\lfloor x \rfloor} p_n,$$

eine Verteilungsfunktion ist und bestimme das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
Hinweis: $\lfloor x \rfloor := \sup\{z \in \mathbb{Z} : z \leq x\}$ *notiert hierbei die untere Gaußklammer von* x *und per Konvention ist der Wert der leeren Summe* 0.

(6 Punkte)

4. Das Lebesgue-Maß.

Sei $\mathcal{S} := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}$ und

$$\lambda\colon \mathcal{S} \to [0, \infty), \quad (a, b] \mapsto \lambda((a, b]) = b - a.$$

Setze λ mittels des Fortsetzungssatzes zu einem Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ fort.
Hinweis: Ihr könnt euch dabei an dem Beispiel für Verteilungsfunktionen aus der Vorlesung orientieren.

(8 Punkte)

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 24. September 2019, 18:00 Uhr, in den Briefkasten eures Tutors in A5 einzuwerfen.