Prof. Dr. Leif Döring
Niklas Dexheimer

Stochastik I

1. Übung

1. Weitere Eigenschaften von σ-Algebren und Maßen.

a) Zeige, dass jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ folgende Eigenschaften erfüllt:

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}$,

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \implies B \backslash A \in \mathcal{A}$ und $A \triangle B \in \mathcal{A}$.

(3 Punkte)

b) Seien zwei nicht leere Mengensysteme A und B gegeben mit $A \subseteq B$. Zeige, dass

$$\sigma(A) \subseteq \sigma(B)$$

erfüllt ist. *(2 Punkte)*

c) Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum, μ ein endliches Maß und $A, B \in \mathcal{A}$. Zeige die folgenden Aussagen:

(i) $A \subseteq B \implies \mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$, *(1 Punkte)*

(ii) $|\mu(A) - \mu(B)| \leq \mu(A \triangle B)$, *(2 Punkte)*

(iii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \implies \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$. *(2 Punkte)*

2. Vereinigungen und Schnitte von Mengensystemen.

Sei $\mathcal{I}$ eine beliebige Indexmenge und $(\mathcal{D}_i)_{i \in \mathcal{I}}$ eine Familie von Dynkin-Systemen über eine nicht leere Menge Ω. Zeige die folgenden Aussagen:

(a) $\bigcap_{i \in \mathcal{I}} \mathcal{D}_i$ ist ein Dynkin-System; *(2 Punkte)*

(b) Die Vereinigung zweier σ-Algebren ist im Allgemeinen keine σ-Algebra. *(2 Punkte)*

3. Summen von Maßen.

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum, versehen mit einer Folge von Maßen $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Zeige, dass

$$\mu := \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i$$

ein Maß definiert. *(4 Punkte)*

4. Wahrscheinlichkeitsmaße.

Sei der messbare Raum $(\mathbb{N}_0, \mathcal{P}(\mathbb{N}_0))$ gegeben, versehen mit

$$\mu_1 \coloneqq c_1 \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n, \quad c_1 \in \mathbb{R}, p \in (0,1),$$

$$\mu_2 \coloneqq c_2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad c_2 \in \mathbb{R}, p \in (0,1), n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_3 \coloneqq \sum_{k=0}^{n} a_k \delta_k, \quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N},$$

wobei δ_k das Dirac-Maß in k bezeichne. Welche Forderungen müssen die Konstanten c_1, c_2 und $a_1, \dots, a_n$ erfüllen, damit die obigen Funktionen Maße bzw. Wahrscheinlichkeitsmaße sind?
Ohne Begründung keine Punkte, so wie immer. ☺

(3 Punkte)

5. Modellierung von Zufallsexperimenten.

Aus einer Menge von vier Kugeln werden zwei blind ausgewählt, wobei jede Kugel einer Zahl zwischen eins und vier entspricht.

(a) Modelliere einen diesem Experiment entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraum. Gebe dazu eine Menge von Elementarereignissen Ω, eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ und ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ an. *(3 Punkte)*

(b) Definiere und berechne die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse:

(i) Die Summe der Kugeln ist größer als 5. *(2 Punkte)*

(ii) Das Produkt der Kugeln ist ungerade. *(2 Punkte)*

(iii) Die Kugel Nummer drei wird gezogen. *(2 Punkte)*

Die Lösungen sind in Zweiergruppen bis Dienstag den 10. September 2019, 18:00 Uhr, in einen beliebigen Stochastik Briefkasten in A5 einzuwerfen.