Ges: Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, $p \geq 1$

$f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$

$$\lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\int_\Omega |f_n - g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} = 0$$

Beh: $f = g$ μ-f.ü

Bew:

Mit der Minkowski-Ungleichung gilt für $n \in \mathbb{N}$:

$$\underbrace{\left(\int_\Omega |f - g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}}_{= \circledast} = \left(\int_\Omega |f - f_n + f_n - g|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\leq \left(\int_\Omega |f - f_n|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_\Omega |g - f_n|^p \, d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\circledast$ unabhängig von n

$$\Rightarrow \int_\Omega |f - g|^p \, d\mu = 0 \quad \overset{|f-g|^p \geq 0}{\Rightarrow} \quad |f - g|^p = 0 \ \mu\text{-f.ü} \quad \text{(Satz 3.7.5)}$$

$$\Rightarrow f = g \ \mu\text{-f.ü.}$$

Sei nun $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, also eine Folge von Äquivalenzklassen von Funktionen in $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, sodass $f_n \sim \hat{f}_n \Leftrightarrow f_n = \hat{f}_n$ μ-f.ü.

Falls für eine Folge von Repräsentanten dieser Äquivalenzklassen $\left(\int_\Omega |f_n - f|^p \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ gilt

für ein $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ gilt somit auch

$\left(\int_\Omega |\hat{f}_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ für jede andere Folge von Repräsentanten $(\hat{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von f, da $|\hat{f}_n - f| = |f_n - f|$ μ-f.ü.

Wir haben zuvor oben gezeigt, dass ...

für eine solche Folge von Repräsentanten

$\left(\int_\Omega |f_n - f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$ und $\left(\int_\Omega |f_n - g|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \xrightarrow{n \to \infty} 0$

$\Rightarrow f = g$ μ-f.ü. $\Rightarrow [f] = [g]$ gilt,

woraus folgt, dass Grenzwerte von Folgen in $L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ eindeutig sind. $\square$