Geg.: $F_1 : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \mapsto \frac{x-a}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x) + \mathbb{1}_{(b,\infty)}(x)$

$F_2 : \mathbb{R} \to [0,1]$, $x \to (1-e^{-\lambda x}) \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x)$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+(x-t)^2}$

a) zz: Dichtefkt. für F_1, F_2

Lsg:

Sei: $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $x \mapsto \frac{1}{b-a} \mathbb{1}_{[a,b]}(x)$, $t \in \mathbb{R}$ (*)

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{t} f_1(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , t < a \\ \int_a^t \frac{1}{b-a}\,dx & , a \le t \le b \\ \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx & , b < t \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & , t < a \\ \frac{t-a}{b-a} & , a \le t \le b \\ \frac{b-a}{b-a} = 1 & , b < t \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{[a,b]}(t) \frac{t-a}{b-a} + \mathbb{1}_{(b,\infty)}(t)$$

$$= F_1(t)$$

Da zudem $f_1 \ge 0$ und $\int_{-\infty}^{\infty} f_1(x)\,dx = 1$ gilt, ist f_1 somit die Dichtefunktion von F_1.

(*) $\Rightarrow f_1 \in L^1(\mathbb{R})$, da Indikatorfunktion eines beschränkten Intervalls.

Sei $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \; x \mapsto \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x), \; t \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow f_2 \geq 0$ und $f_2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nach Ana 2.

$$\int_{-\infty}^{t} f_2 \, dx = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx, & t \geq 0 \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \left[- e^{-\lambda x} \right]_0^t$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\infty)}(t) \left(- e^{-\lambda t} + 1 \right)$$

$$= F_2(t)$$

Somit gilt auch $\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x) \, dx = 1$.

$\Rightarrow f_2$ ist Dichtefunktion von F_2. $\square$

b) <u>ZZ:</u> Dichtefkt. + Vert.-fkt. von W-Maß $\mathbb{P}$, sodass
$\mathbb{P}((-\infty, 1)) = \frac{1}{3}$, $\mathbb{P}([1,\infty)) = \frac{2}{3}$

Lsg: Sei $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+, \; x \mapsto \mathbb{1}_{[0,\sqrt{3}]}(x) \frac{2}{3} x$

$\Rightarrow g \geq 0$ und $g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R})$ nach Ana 2 (vgl. Satz 12.3.3)

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \, dx = \int_0^{\sqrt{3}} \frac{2}{3} x \, dx = \left[\frac{1}{3} x^2 \right]_0^{\sqrt{3}} = 1.$$

$\Rightarrow g$ ist Dichtefunktion.

$\Rightarrow G: \mathbb{R} \to [0,1], \; t \mapsto \int_{-\infty}^{t} g(x) \, dx$ ist

Verteilungsfunktion und es gilt für $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{t} g(x)\,dx = \begin{cases} 0 & , t < 0 \\ \int_0^t \frac{2}{3} x \,dx, & 0 \leq t \leq \sqrt{3} \\ 1 & , t > \sqrt{3} \end{cases}$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t) \left[\tfrac{1}{3}x^2\right]_0^t + \mathbb{1}_{(\sqrt{3},\infty)}(t)$$

$$= \mathbb{1}_{[0,\sqrt{3}]}(t)\, \tfrac{1}{3} t^2 + \mathbb{1}_{(\sqrt{3},\infty)}(t).$$

sei $\mathbb{P}$ das korrespondierende W-Maß zu G auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Da G stetig ist, gilt

$\mathbb{P}((-\infty, 1)) = \mathbb{P}((-\infty, 1]) = G(1) = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow \mathbb{P}([1,\infty)) = 1 - \mathbb{P}((-\infty,1)) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$. $\square$

c) Beh: f ist Dichtefkt.

Lsg: Nach Ana 2 ist $\frac{1}{1+x^2} \in L^1(\mathbb{R})$ (vgl. 12.5.8 Ana 2), mit der Substitution $\frac{y-t}{s} = x$ folgt:

$dx = \frac{1}{s} dy$ und

$$1 = \frac{1}{\pi}\left[\arctan(x)\right]_{-\infty}^{\infty} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+\frac{1}{s^2}(y-t)^2} \cdot \frac{1}{s}\,dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{1}{s + \frac{1}{s}(y-t)^2} \, dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + (y-t)^2} \, dy.$$
$\Rightarrow$ Da zudem $f \geq 0$ ist und stetig ist f somit eine Dichtefunktion.

f wird für Werte von x in der Nähe von t „groß", weshalb t das Zentrum der Masse angibt. Für kleine Werte von s sind die Werte von f in der Nähe von t größer und für große s kleiner, also gibt s an wie sehr die Masse auf $\mathbb{R}$ verteilt ist.

d) z.z.: c_p, sodass $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto \frac{1}{c_p} x^{-p} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x)$ Dichtefunktion, wenn $p > 1$.

Lsg:

Sei $p > 1$. $\Rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} g(n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{c_p} n^{-p} < \infty$

$\overset{\text{Ana 2}}{\Rightarrow} g \in L^1([0,\infty))$, da g monoton fallend.

$\Rightarrow g \in L^1$, da $g(x) = 0 \ \forall x \in (-\infty, 0)$.

Des Weiteren gilt $g \geq 0$ und

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{c_p} x^{-p} \mathbb{1}_{[1,\infty)}(x) \, dx$$

$$= \frac{1}{c_p} \int_1^{\infty} x^{-p} \, dx = \frac{1}{c_p} \left[\frac{1}{1-p} x^{1-p} \right]_1^{\infty} = \frac{1}{c_p} \frac{1}{p-1}$$

Also: $\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx = 1 \iff c_p = \frac{1}{p-1}$

$\Rightarrow$ Für $c_p = \frac{1}{p-1}$ ist g eine Dichtefunktion