Geg: $X \sim \mathcal{U}([-1,1])$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folge von ZV'en mit

$X_n = (-1)^n X \quad \forall n \in \mathbb{N}$

a) Bew: $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konv. in Verteilung gegen X.

Bew:

Sei $f \in C_b(\mathbb{R})$. Dann gilt für $n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$

$$E[f(X_n)] = E[f((-1)^n X)] = E[f(X)]$$

und für $n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1\}$

$$E[f(X_n)] = E[f(-X)]$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(-x) \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\, dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} f(-x)\, dx$$

Substitution

$y = -x$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -1$

$\Rightarrow dx = -dy$

$$= \int_{1}^{-1} \frac{1}{2} f(y)(-1)\, dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} f(y)\, dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} f(y) \mathbb{1}_{[-1,1]}(y)\, dy$$

$$= E[f(X)],$$

da weil $f \in C_b(\mathbb{R})$ ist die Integrale existieren

Also gilt $\mathbb{E}[f(X_n)] = \mathbb{E}[f(X)] \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} E[f(X_n)] = E[f(X)]$

und da $f \in C_b(\mathbb{R})$ beliebig war, konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen X.

b) <u>Beh:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stochastisch gegen X.

<u>Bew:</u>

sei $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Dann gilt für alle $n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1\}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(|-2X| > \tfrac{1}{2}) \\
&= \mathbb{P}(|X| > \tfrac{1}{4}) \\
&= \mathbb{P}_X((\tfrac{1}{4}, 1] \cup [-1, -\tfrac{1}{4})) \\
&= \mathbb{P}_X((\tfrac{1}{4}, 1]) + \mathbb{P}_X([-1, -\tfrac{1}{4})) \\
&= \int_{\frac{1}{4}}^{1} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} \frac{1}{2} \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)\,dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\int_{\frac{1}{4}}^{1} 1\,dx + \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} 1\,dx\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} + \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{3}{4}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|X_n - X| > \frac{1}{2}) \not\xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht stochastisch gegen X.

c) <u>Beh:</u> $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht fast sicher gegen X.

<u>Bew:</u>

Sei $A = \{\omega \in \Omega : X(\omega) > \frac{1}{4}\}$

Dann gilt $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{8}$ (siehe b) und

$X(\omega) \neq -X(\omega) \ \forall \omega \in A$.

$\Rightarrow X_n(\omega) \neq X(\omega) \ \forall \omega \in A, n \in \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k+1\}$

$\Rightarrow X_n(\omega) \underset{n\to\infty}{\not\to} X(\omega) \ \forall \omega \in A$.

$\Rightarrow (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht fast sicher gegen X, da $\mathbb{P}(A) > 0$ und

$\{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} X_n(\omega) \neq X(\omega)\} \supseteq A$ somit

keine Nullmenge ist. $\square$