Ges: W-Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P} = \mathcal{N}(0,\sigma^2)$.

zz: σ, sodass $\mathbb{P}([-1,1]) \geq 0{,}99$.

Lsg:
Da die Dichte der Normalverteilung stetig ist, ist auch die Verteilungsfunktion der Normalverteilung stetig

gilt

$$\Rightarrow \mathbb{P}([-1,1]) = \mathbb{P}((-1,1]) = F(1) - F(-1),$$

wobei F die Verteilungsfunktion der Normalverteilung sei.

Mit der Substitution $y=-x$ gilt zudem für $v \geq 0$:

$$e^{-\frac{v^2}{2\sigma^2}} \geq \int_v^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-v}^{-\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(-y)^2}{2\sigma^2}} (-1)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{-v} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{y^2}{2\sigma^2}} dy$$

$$= F(-v)$$

$$\Rightarrow F(-1) \leq e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

zudem gilt:

$$F(1) = \int_{-\infty}^{1} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$= 1 - \int_1^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} dx$$

$$\geq 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{P}([-1,1]) = F(1) - F(-1)$$

$$\geq 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} - F(-1)$$

$$\geq 1 - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}} - e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

$$= 1 - 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

Also gilt:

$$1 - 2e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} \geq 0{,}99 \Rightarrow \mathbb{P}([-1,1]) \geq 0{,}99$$

und

$$1 - 2e^{-\frac{1}{2}\sigma^2} \geq 0{,}99$$

$$\Leftrightarrow \quad 0{,}01 \geq 2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}01) \geq \ln(2e^{-\frac{1}{2\sigma^2}})$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) \geq \ln(2) + \ln(e^{-\frac{1}{2\sigma^2}})$$

$$\Leftrightarrow \ln(0{,}01) - \ln(2) \geq -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \ln(0{,}005) \geq -\frac{1}{2\sigma^2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{\ln(0{,}005)} \leq -2\sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2\ln(0{,}005)} \geq \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2\ln(200)} \geq \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \quad \sqrt{\frac{1}{2\ln(200)}} \geq \sigma .$$

Also gilt: $\sigma \leq \sqrt{\frac{1}{2\ln(200)}} \Rightarrow \mathbb{P}([-1,1]) \geq 0{,}99$

$\square$