Stochastik I

9. Große Übung

Niklas Dexheimer

20.11.2019

Beispiel zur Poisson-Verteilung: Hufschlagtote in preußischen Kavallerieregimenten

Ein in der Literatur häufig zitiertes Beispiel zur Poisson-Verteilung ist die Anzahl der Soldaten eines preußischen Kavallerieregiments, die innerhalb eines Jahres an den Folgen eines Huftritts starben. Die Daten wurden für 10 Regimenter über 20 Jahre erfasst.

Anzahl der Todesfälle	0	1	2	3	4	≥5
Beobachtete Häufigkeit	109	65	22	3	1	0

Die mittlere Anzahl beträgt dann 0.61. Es ergibt sich dann eine sehr gute Übereinstimmung der relativen Häufigkeiten mit den Wahrscheinlichkeiten der Poi(0.61)-Verteilung.

Anzahl der Todesfälle	0	1	2	3	4
$\mathrm{Poi}(0.61)(\{k\})$	0.545	0.325	0.110	0.015	0.005
Beob. relative Häufigkeit	0.543	0.331	0.101	0.021	0.003

Erinnerung: Faltung

Definition

Sind $\mu_1, \dots, \mu_n$ Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ so heißt das Bildmaß des Produktmaßes $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n$ unter der Abbildung

$$h_n \colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 + \cdots + x_n,$$

Faltung von $\mu_1, \dots, \mu_n$. Man schreibt

$$(\mu_1 * \cdots * \mu_n)(B) := (\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_n)(h_n^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Schön und gut, aber was soll diese Faltung jetzt bedeuten?

Erinnerung: Summen von unabhängigen Zufallsvariablen

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann gilt für die Verteilung der Summe dieser Zufallsvariablen

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_n \in B) &= \mathbb{P}(h_n(X_1, \ldots, X_n) \in B) \\
&= \mathbb{P}((X_1, \ldots, X_n) \in h_n^{-1}(B)) \\
&= \mathbb{P}_{(X_1, \ldots, X_n)}(h_n^{-1}(B)) \\
&= (\mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_n})(h_n^{-1}(B)) \\
&= (\mathbb{P}_{X_1} * \cdots * \mathbb{P}_{X_n})(B),
\end{aligned}$$

wobei B eine Menge aus $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sei. Die Faltung der Verteilungen von unabhängigen Zufallsvariablen ist also genau die Verteilung der Summe der entsprechenden Zufallsvariablen!

Erinnerung: Faltung von Verteilungen

Allgemein gilt für die Faltung zweier Wahrscheinlichkeitsmaße $\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$

$$\mathbb{P}_1 * \mathbb{P}_2(B) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{P}_1(B - y)\, \mathrm{d}\mathbb{P}_2(y),$$

wobei

$$B - y := \{x - y : x \in B\}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

Was bedeutet das jetzt für diskrete und stetige Wahrscheinlichkeitsmaße?

Erinnerung: Faltung diskreter Verteilungen

Für diskrete Verteilungen braucht man die Faltung eigentlich überhaupt nicht! Seien X_1, X_2 unabhängige, diskrete Zufallsvariablen. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = a) &= \mathbb{P}(X_1 + X_2 = a, X_2 \in X_2(\Omega)) \\
&= \mathbb{P}\left(X_1 + X_2 = a, X_2 \in \dot{\bigcup_{b \in X_2(\Omega)}} \{b\}\right) \\
&= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 + X_2 = a, X_2 = b) \\
&= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = a - b, X_2 = b) \\
&= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = a - b)\mathbb{P}(X_2 = b).
\end{aligned}$$

Beispiel: Summe diskreter Verteilungen

Seien X_1, X_2 unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit

$$\mathbb{P}(X_1 = 1) = \mathbb{P}(X_2 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 2) = \mathbb{P}(X_2 = 2) = \frac{1}{2}.$$

Dann gilt

$$X_2(\Omega) = \{1, 2\}$$

und somit

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + X_2 = 4) &= \sum_{b \in X_2(\Omega)} \mathbb{P}(X_1 = 4 - b)\mathbb{P}(X_2 = b) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 4 - 1)\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 4 - 2)\mathbb{P}(X_2 = 2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 = 3)\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 2)\mathbb{P}(X_2 = 2) \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Erinnerung: Faltung stetiger Verteilungen

Für Summen unabhängiger stetiger Zufallsvariablen braucht man hingegen die Faltung. Diese liefert dann eine Regel für die Dichte der Zufallsvariable $X_1 + X_2$, wenn X_1, X_2 unabhängige, stetige Zufallsvariablen, denn nach der Vorlesung gilt für diese

$$f_{X+Y}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y) f_Y(y) \, \mathrm{d}y.$$

Aufgabe 1

Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass

$$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y = \mathcal{U}([0, 1]).$$

Berechne die Dichte der Zufallsvariable $Z := X + Y$ und den Erwartungswert von $\max\{1, Z\}$.

Lösung

Nach der Vorlesung gilt

$$
\begin{aligned}
f_Z(x) &= \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y) f_Y(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[0,1]}(x-y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1,x]}(y)\mathbb{1}_{[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y,
\end{aligned}
$$

denn

$$0 \leq x-y \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad x \geq y \geq x-1.$$

Also folgt

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1,x]\cap[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y.$$

Lösung

Mit

$$f_Z(x) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x-1,x]\cap[0,1]}(y)\,\mathrm{d}y$$

folgt

$$\begin{aligned} f_Z(x) &= \begin{cases} 0 & , x < 0, \\ x & , 0 \le x \le 1, \\ 1 - (x-1) & , 1 < x \le 2, \\ 0 & , 2 \le x. \end{cases} \\ &= x\mathbb{1}_{[0,1]}(x) + (2-x)\mathbb{1}_{(1,2]}(x). \end{aligned}$$

Also kennen wir die Dichte von Z und können somit auch $\mathbb{E}[\max\{1, Z\}]$ ausrechnen.

Lösung

Nach der Vorlesung gilt, da Z eine Zufallsvariable mit bekannter Dichte ist

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[\max\{1, Z\}] &= \int_{\mathbb{R}} \max\{1, z\} f_Z(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \max\{1, z\} \left(z\mathbb{1}_{[0,1]}(z) + (2-z)\mathbb{1}_{(1,2]}(z)\right) \mathrm{d}z \\
&= \int_{\mathbb{R}} \max\{1, z\} z\mathbb{1}_{[0,1]}(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\mathbb{R}} \max\{1, z\}(2-z)\mathbb{1}_{(1,2]}(z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \max\{1, z\} z\,\mathrm{d}z + \int_1^2 \max\{1, z\}(2-z)\,\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 z\,\mathrm{d}z + \int_1^2 2z - z^2\,\mathrm{d}z \\
&= \left[\frac{1}{2}z^2\right]_0^1 + \left[z^2 - \frac{1}{3}z^3\right]_1^2 \\
&= \left(\frac{1}{2} - 0\right) + \left(4 - \frac{8}{3} - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\right) = \frac{7}{6}.
\end{aligned}
$$

Bedingte Wahrscheinlichkeiten

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Mengen aus $\mathcal{A}$ (also Ereignisse) mit $\mathbb{P}(B) > 0$. Dann heißt

$$\mathbb{P}(A|B) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

die bedingte Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A gegeben B.

$\mathbb{P}(A|B)$ gibt an, wie groß die Wahrscheinlichkeit ist, dass A eintritt, falls B schon eingetreten ist.

Aufgabe 2

Sei X eine $\mathbb{N}$-wertige Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Zeige die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

1) $X \sim \mathrm{Geo}(p)$ für ein $p \in (0, 1)$, d.h. es gilt

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1}\delta_n.$$

2) Die Verteilung von X ist gedächtnislos, d.h. für alle $k, n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > k) = \mathbb{P}(X = n).$$

3) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{P}(X = n + 1 | X > 1) = \mathbb{P}(X = n)$.

Hinweis: Für $q \in (0, 1)$ gilt

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}.$$

Lösung

Sei $X \sim \text{Geo}(p)$. Dann gilt per Definition für $k, n \in \mathbb{N}$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n + k | X > k) &= \frac{\mathbb{P}(X = n + k, X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = n + k)}{\mathbb{P}(X > k)} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{1 - \mathbb{P}(X \leq k)} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{1 - \sum_{i=1}^{k} p(1-p)^{i-1}} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{1 - \sum_{i=0}^{k-1} p(1-p)^{i}} \\
&= \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{1 - p(\frac{1-(1-p)^k}{1-(1-p)})} = \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^k}
\end{aligned}
$$

Lösung

Insgesamt folgt:

$$\mathbb{P}(X = n + k | X > k) = \frac{p(1-p)^{n+k-1}}{(1-p)^k} = p(1-p)^{n-1} = \mathbb{P}(X = n).$$

Also gilt 1) $\implies$ 2).
2) $\implies$ 3) folgt direkt mit der Wahl $k = 1$. Also bleibt nur noch 3) $\implies$ 1) zu zeigen.
Gelte dafür

$$\mathbb{P}(X = n + 1 | X > 1) = \mathbb{P}(X = n)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Lösung

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n) &= \mathbb{P}(X = n + 1 | X > 1) \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = n + 1, X > 1)}{\mathbb{P}(X > 1)} \\
&= \frac{\mathbb{P}(X = n + 1)}{1 - \mathbb{P}(X = 1)}
\end{aligned}$$

und dies ist äquivalent zu

$$\mathbb{P}(X = n)(1 - \mathbb{P}(X = 1)) = \mathbb{P}(X = n + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Lösung

Aus

$$\mathbb{P}(X = n)(1 - \mathbb{P}(X = 1)) = \mathbb{P}(X = n + 1), \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

folgt dann per vollständiger Induktion mit der Wahl $p = \mathbb{P}(X = 1)$, dass

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1 - p)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

gilt, denn für $n = 1$ gilt per Definition $\mathbb{P}(X = 1) = p = p(1 - p)^0$ und falls die Aussage für ein $n \in \mathbb{N}$ gilt, folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = n + 1) &= \mathbb{P}(X = n)(1 - \mathbb{P}(X = 1)) \\
&= p(1 - p)^{n-1}(1 - p) \\
&= p(1 - p)^n.
\end{aligned}$$

Lösung

Da X nur Werte in $\mathbb{N}$ annimmt, folgt aus

$$\mathbb{P}(X = n) = p(1-p)^{n-1}, \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

dass

$$\mathbb{P}_X = \sum_{n=1}^{\infty} p(1-p)^{n-1} \delta_n$$

gilt und somit folgt

$$X \sim \mathrm{Geo}(p).$$