Stochastik I

8. Große Übung

Niklas Dexheimer

13.11.2019

Erinnerung: Zufallsvektoren

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Eine Abbildung

$$X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^d, \quad \omega \mapsto X(\omega) = \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ X_2(\omega) \\ \vdots \\ X_d(\omega) \end{pmatrix},$$

heißt Zufallsvektor, falls sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$-messbar ist.

- X ist genau dann ein Zufallsvektor, wenn alle $X_i \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen sind, also wenn sie $\mathcal{A}$-$\mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sind.

Erinnerung: Verteilungen von Zufallsvektoren

Definition

Das Maß

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),$$

auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ heißt Verteilung des Zufallsvektors X.

- Um die Verteilung der Zufallsvariablen X_i, $i \in \{1, \dots, d\}$, zu berechnen nutzen wir folgende Gleichung

  $$\mathbb{P}(X_i \in B) = \mathbb{P}(X_1 \in \mathbb{R}, X_2 \in \mathbb{R}, \dots, X_i \in B, \dots, X_d \in \mathbb{R}) = \mathbb{P}_X(\mathbb{R} \times \dots \times B \times \dots \times \mathbb{R}), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

  man nennt $\mathbb{P}_{X_i}$ dann auch eindimensionale Randverteilung von X_i.

Erinnerung: Identisch verteilte Zufallsvariablen

Definition

Seien X, Y Zufallsvariablen auf beliebigen Wahrscheinlichkeitsräumen (nicht notwendigerweise der selbe!). Dann heißen X und Y identisch verteilt, falls

$$F_X = F_Y$$

gilt.

Mit dem Hauptsatz über Dynkinsysteme gilt

$$F_X = F_Y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{P}_X = \mathbb{P}_Y,$$

weshalb die Definition über Verteilungsfunktionen hier ausreicht.

Erinnerung: Unabhängige Zufallsvariablen

Definition

Seien $X_1, \ldots, X_d$ Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Die Zufallsvariablen heißen dann unabhängig, falls

$$F_{(X_1,\ldots,X_d)} = F_{X_1} \cdots F_{X_d}$$

gilt.

Es gilt zudem für unabhängige Zufallsvariablen und messbare Funktionen $f_1, \ldots, f_d \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_{(X_1,\ldots,X_d)} &= \mathbb{P}_{X_1} \otimes \cdots \otimes \mathbb{P}_{X_d}, \\
\mathbb{P}(X_1 \in B_1, \ldots, X_d \in B_d) &= \mathbb{P}(X_1 \in B_1) \cdots \mathbb{P}(X_d \in B_d), \quad B_i \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d),\ i = 1, \ldots, d, \\
\mathbb{E}[f_1(X_1) \cdots f_d(X_d)] &= \mathbb{E}[f_1(X_1)] \cdots \mathbb{E}[f_d(X_d)],
\end{aligned}$$

wobei die letzte Gleichung nur gilt, falls die Erwartungswerte existieren.

Erinnerung: Kovarianz und Korrelation

Definition

Seien X, Y Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, sodass die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[XY]$ existieren. Dann heißt

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$

Kovarianz von X und Y. Die Korrelation von X und Y ist dann, falls zudem $\mathbb{V}(X), \mathbb{V}(Y) > 0$ gilt, definiert durch

$$\mathrm{Cor}(X, Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}}.$$

Insbesondere gilt

$$\mathrm{Cov}(X, X) = \mathbb{V}(X).$$

Interpretation der Kovarianz

- Eine positive Kovarianz wird so interpretiert, dass falls X einen großen (niedrigen) Wert annimmt, Y wahrscheinlich auch einen großen (niedrigen) Wert annimmt.
- Eine negative Kovarianz wird so interpretiert, dass falls X einen großen (niedrigen) Wert annimmt, Y wahrscheinlich einen niedrigen (großen) Wert annimmt.
- Sie sagt aber nichts über die Stärke dieser Beziehung aus, deshalb verwendet man oft die Korrelation, eine standardisierte Form der Kovarianz.

Aufgabe 1

a) Seien X, Y unabhängige Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ für die die Kovarianz definiert ist. Zeige, dass

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$$

gilt.

b) Seien X, Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Berechne

$$\mathrm{Cov}(aX + bY, cX + dY), \quad \mathrm{Cor}(aX + bY, cX + dY), \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

c) Zeige, dass im Allgemeinen für zwei Zufallsvariablen X, Y für die die Korrelation definiert ist,

$$|\mathrm{Cor}(X, Y)| \leq 1$$

gilt.

Erinnerung: Cauchy-Verteilung

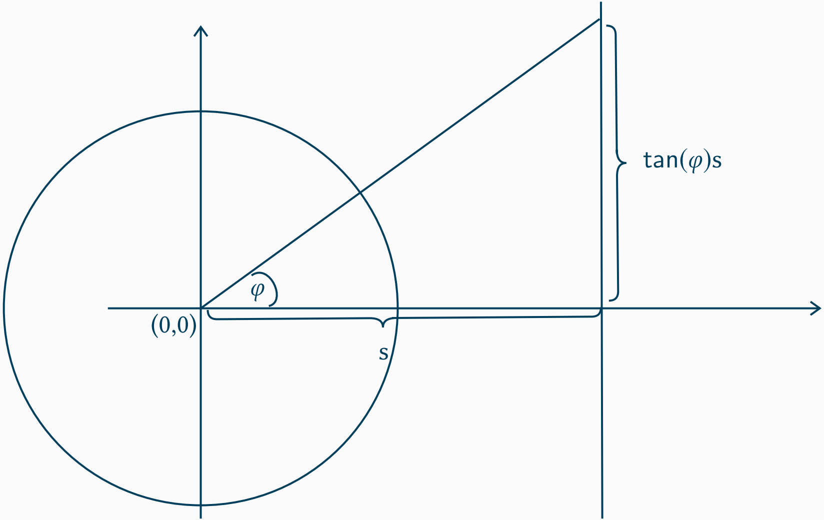
Definition

Die Cauchy-Verteilung $\mathrm{Cauchy}(s, t)$ mit $s > 0$, $t \in \mathbb{R}$ ist definiert als das Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}\mathbb{R})$ mit Dichtefunktion

$$f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty), \qquad x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2 + (x - t)^2}.$$

Die Cauchy-Verteilung wird manchmal auch Discokugel-Verteilung genannt, aber warum?

Discokugel ‽



Aufgabe 2

Berechne die Verteilungsfunktion der Cauchy$(s, 0)$ Verteilung für $s > 0$.
Zeige zudem, dass wenn

$$\varphi \sim \mathcal{U}\left(\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)\right)$$

gilt

$$\tan(\varphi)s \sim \text{Cauchy}(s, 0)$$

folgt.