# Stochastik I

## 7. Große Übung

Niklas Dexheimer

06.11.2019

# Erinnerung: Multivariate Verteilungsfunktionen

**Definition**

Eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1]$ heißt multivariate Verteilungsfunktion, falls sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

i) $\lim\limits_{t_1 \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_d) = \lim\limits_{t_2 \to -\infty} F(t_1, \ldots, t_d) = \ldots = \lim\limits_{t_d \to -\infty} F(t_, \ldots, t_d) = 0$,

ii) $\lim\limits_{t_1, t_2, \ldots, t_d \to \infty} F(t_1, \ldots, t_d) = 1$,

iii) $F$ ist in jeder Variablen rechtsstetig,

iv) $F$ ist rechtecksmonoton.

- Wie bei Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist die Funktion $F_{\mathbb{P}}(t_1, \ldots, t_d) := \mathbb{P}((-\infty, t_1] \times \cdots \times (-\infty, t_d])$ für jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ eine multivariate Verteilungsfunktion.
- Mit dem Fortsetzungssatz von Carathéodory und dem Hauptsatz über Dynkin-Systeme existiert zu jeder multivariaten Verteilungsfunktion auch wieder ein eindeutig bestimmtes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$.

# Erinnerung: Rechtecksmonotonie

**Definition**

Eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ heißt rechtecksmonoton, falls für $t^1 \leq t^2 \in \mathbb{R}^d$ (d.h. $t_k^1 \leq t_k^2,\ \forall k \in \{1,\ldots,d\}$)

$$\Delta_{t^1}^{t^2} F := \sum_{i_1,\ldots,i_d \in \{1,2\}} (-1)^{i_1+\ldots+i_d} F(t_1^{i_1},\ldots,t_d^{i_d}) \geq 0$$

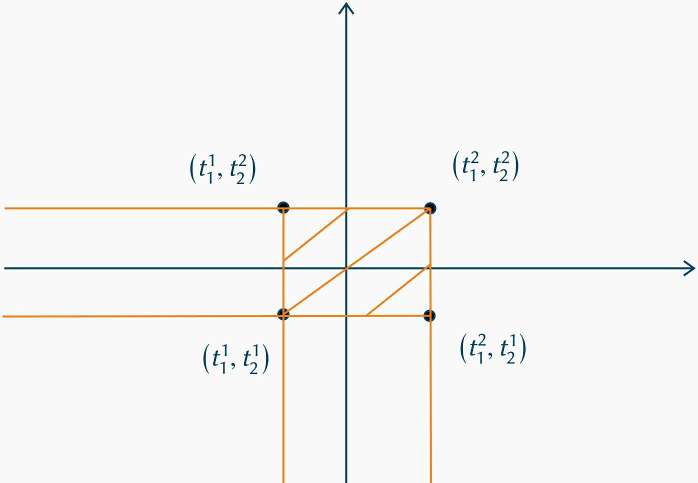
gilt.

- Die Rechtseckmonotonie ist eine Verallgemeinerung der Monotonie von Verteilungsfunktionen. Für $d = 1$ entspricht sie gerade der normalen Monotonie von Verteilungsfunktionen.
- Es gilt: $\Delta_{t_1}^{t^2} F = \mathbb{P}_F((t_1^1, t_1^2] \times \cdots \times (t_d^1, t_d^2])$. Deshalb darf dieser Wert auch nicht negativ werden!

# Erinnerung: Rechtseckmonotonie in $\mathbb{R}^2$

Für d=2 entspricht die Rechtseckmonotonie gerade

$$F(t_1^2, t_2^2) - F(t_1^1, t_2^2) - F(t^2, t_2^1) + F(t_1^1, t_1^1) \geq 0, \quad \forall t^1 \leq t^2 \in \mathbb{R}^2.$$



# Nützliches zur Rechtseckmonotonie

Für den Differenzoperator $\Delta_{t^1}^{t^2}$ gilt zudem für eine Funktion $F\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ und $t^1 \le t^2 \in \mathbb{R}^d$:

$$\begin{aligned}
\Delta_{t^1}^{t^2} F &= \sum_{i_1,\dots,i_d \in \{1,2\}} (-1)^{i_1+\dots+i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{2} \sum_{i_2=1}^{2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_1+\dots+i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{2} (-1)^{i_1} \sum_{i_2=1}^{2} (-1)^{i_2} \cdots \sum_{i_d=1}^{2} (-1)^{i_d} F(t_1^{i_1}, \dots, t_d^{i_d}).
\end{aligned}$$

# Aufgabe 1

Seien $F_1, F_2, \ldots, F_d\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ mit $d \in \mathbb{N}$ Verteilungsfunktionen. Zeige, dass

$$F\colon \mathbb{R}^d \longrightarrow [0,1], \quad (t_1, t_2, \ldots, t_d)^T \longrightarrow F(t_1, t_2, \ldots, t_d) := F_1(t_1)F_2(t_2)\cdots F_d(t_d),$$

eine multivariate Verteilungsfunktion definiert. Welches Wahrscheinlichkeitsmaß korrespondiert mit dieser Verteilungsfunktion?