Stochastik I

6. Große Übung

Niklas Dexheimer

23.10.2019

Erinnerung: Zufallsvariablen

Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt eine $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbare Abbildung

$$X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega \longmapsto X(\omega),$$

Zufallsvariable.

- Eine Zufallsvariable X ordnet also jedem Elementarereignis ω einen Wert/eine Auszahlung in $\mathbb{R}$ zu.
- Wenn $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ messbar ist, ist auch $f(X)$ eine Zufallsvariable, da die Verkettung messbarer Abbildungen messbar ist.
- X muss $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$-messbar sein, damit wir die Wahrscheinlichkeit, dass X Werte in einer Menge $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ annimmt, bestimmen können. $\rightsquigarrow$ Verteilung

Erinnerung: Verteilungen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B) \overset{\text{Not.}}{=} \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)), \quad B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}),$$

Verteilung von X.

- Hier wird die Messbarkeit von X wichtig, da wir dadurch wissen, dass $X^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ gilt und somit $\mathbb{P}_X(B)$ für alle $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ wohldefiniert ist.
- $\mathbb{P}_X$ ist der push-forward (das Bildmaß) von X.
- Nach der Vorlesung ist $\mathbb{P}_X$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.
  $\rightsquigarrow$ Verteilungsfunktionen und Erwartungswerte

Erinnerung: Verteilungsfunktionen von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$F_X \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad t \mapsto F_X(t) := \mathbb{P}(X \leq t) = \mathbb{P}_X((-\infty, t]),$$

Verteilungsfunktion von X.

- Die Verteilungsfunktion einer Zufallsvariablen ist also die Verteilungsfunktion der Verteilung der Zufallsvariablen bzw. des push forwards der Zufallsvariablen.

Erinnerung: Erwartungswerte von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{E}[X] := \int_\Omega X(\omega)\, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Erwartungswert von X, falls das Integral existiert.

- Der Erwartungswert einer Zufallsvariablen wird interpretiert als der erwartete Mittelwert der Auszahlung eines Zufallsexperiments bei häufiger Durchführung. Er wird auch als Schwerpunkt der Wahrscheinlichkeitsmasse von $\mathbb{P}_X$ angesehen.
- Trotzdem gilt häufig $\mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = \mathbb{P}_X(\{\mathbb{E}[X]\}) = 0$.
- Nach ÜB5A3 gilt: $\mathbb{E}[X]$ existiert $\Leftrightarrow \mathbb{E}[|X|] < \infty$.
- Eine weitere wichtige Kennzahl einer Zufallsvariablen ist die Varianz.

Erinnerung: Varianz von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\mathbb{V}[X] := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \int_\Omega (X(\omega) - \mathbb{E}[X])^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}(\omega)$$

Varianz von X, falls das Integral existiert.

- Die Varianz gibt an wie stark eine Zufallsvariable X im Durchschnitt von ihrem Erwartungswert abweicht.

$$\text{Große Varianz} \rightsquigarrow \text{Masse von } \mathbb{P}_X \text{ stark verteilt}$$

$$\text{Kleine Varianz} \rightsquigarrow \text{Masse von } \mathbb{P}_X \text{ zentriert um den Erwartungswert}$$

- Es gilt: $\mathbb{E}[X^2] < \infty \Leftrightarrow \mathbb{V}[X] < \infty$ und $\mathbb{V}[X] = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(X = \mathbb{E}[X]) = 1$ (Übungsblatt).

Erinnerung: Momenterzeugende Funktion von Zufallsvariablen

Definition

Sei X eine Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Dann heißt

$$\psi_X \colon D \mapsto [0, \infty), \quad t \mapsto \psi_X(t) := \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}]$$

momenterzeugende Funktion von X, wobei

$$D := \{t \in \mathbb{R} : \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] < \infty\}.$$

- Es gilt immer $D \neq \emptyset$, da $\psi_X(0) = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{0X}] = \mathbb{E}[1] = 1 < \infty$.
- Falls ein $\epsilon > 0$ existiert, mit $(-\epsilon, \epsilon) \subseteq D$, so gilt nach der Vorlesung

$$\mathbb{E}[X^k] = \psi_X^{(k)}(0).$$

$\rightsquigarrow$ Deshalb momenterzeugende Funktion.

Erinnerung: Transformationssatz

Wie berechnet man jetzt den Erwartungswert einer Zufallsvariablen? Das wichtigste Werkzeug dabei ist der Transformationssatz.

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ *messbare Räume,* μ *ein Maß auf* $(\Omega, \mathcal{A})$, $f : \Omega \to \Omega'$ *und* $g \colon \Omega' \to \bar{\mathbb{R}}$. *Dann ist* g μ_f*-integrierbar genau dann, wenn* $g \circ f$ μ*-integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt*

$$\int_{\Omega} g \circ f \, d\mu = \int_{\Omega'} g \, d\mu_f .$$

Erinnerung: Anwendung des Transformationssatzes

Satz (Transformationssatz)

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume, μ ein Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$, $f: \Omega \to \Omega'$ und $g: \Omega' \to \bar{\mathbb{R}}$. Dann ist g μ_f-integrierbar genau dann, wenn $g \circ f$ μ-integrierbar ist, und falls eine dieser Eigenschaften erfüllt ist gilt

$$\int_\Omega g \circ f \, d\mu = \int_{\Omega'} g \, d\mu_f.$$

Also gilt für eine Zufallsvariable X (d.h. X messbare Funktion von Ω nach $\mathbb{R}$) und eine messbare Funktion $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[f(X)] := \int_\Omega f(X(\omega)) \,\mathrm{d}\mathbb{P}(\omega) = \int_\mathbb{R} f(x) \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),$$

wenn $f \circ X$ $\mathbb{P}$-integrierbar oder f $\mathbb{P}_X$-integrierbar ist. Es reicht also aus die Verteilung der Zufallsvariablen X zu kennen!

$\rightsquigarrow$ Deshalb haben wir auch bisher von Erwartungswerten von Verteilungen (Wahrscheinlichkeitsmaßen) bzw. Verteilungsfunktionen gesprochen.

Beispiele

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \int_{\mathbb{R}} x \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),\\ \mathbb{V}[X] &= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \int_{\mathbb{R}} (x-\mathbb{E}[X])^2 \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),\\ \psi_X(t) &= \mathbb{E}[\mathrm{e}^{tX}] = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{tx} \,\mathrm{d}\mathbb{P}_X(x),\end{aligned}$$

falls die Integrale existieren.

- Wenn $\mathbb{P}_X$ eine Dichte hat oder eine Summe von Dirac-Maßen ist, wisst ihr aus der Vorlesung wie ihr diese Integrale berechnet. Ihr könnt damit jetzt auch Erwartungswerte von vielen Zufallsvariablen berechnen!
- Für die Varianz gilt zudem die sogenannte Verschiebungsformel (Übungsblatt)

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

  Mit dieser reicht es aus die ersten beiden Momente von X zu berechnen um $\mathbb{V}[X]$ zu berechnen.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ein Wahrscheinlichkeitsraum auf dem die Zufallsvariablen $X \sim \mathrm{Ber}(p_1)$, $Y \sim \mathrm{Geo}(p_2)$ mit $p_1, p_2 \in (0,1)$ gegeben seien. Also gilt

$$\mathbb{P}_X = p_1\delta_1 + (1-p_1)\delta_0, \quad \mathbb{P}_Y = p_2 \sum_{k=1}^{\infty} (1-p_2)^{k-1}\delta_k.$$

Berechne die momenterzeugenden Funktionen von X und Y und bestimme damit die Erwartungswerte und die Varianzen von X und Y.

Test

Jede richtige Antwort gibt einen Zusatzpunkt für die Übungsblätter. Vergesst euren Namen und den Namen eures Tutors nicht!

Test Aufgabe 1

Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Ergibt $\mu(5)$ Sinn?

Test Aufgabe 2

Welche der folgenden Funktionen ist eine Dichte der Poisson-Verteilung mit Parameter $\lambda > 0$?

A) $f(x) = e^{-\lambda x}\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)$,

B) $f(x) = \lambda^k(1-\lambda)^{n-k}$,

C) $f(x) = e^{-\lambda}\frac{x^\lambda}{\lambda!}$,

D) Alle.

E) Keine.

Test Aufgabe 3

Gebe eine Stammfunktion von

$$f\colon (0,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad x \longmapsto \frac{1}{x}$$

an.

Test Aufgabe 4

Was ist schöner?

A) MCT.
B) DCT.
C) Keins.

Test Aufgabe 5

Gebe zwei verschiedene Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ an.