Stochastik I

3. Große Übung

Niklas Dexheimer

25.09.2019

Erinnerung: Verteilungsfunktionen von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Definition

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann heißt die Funktion

$$F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad x \mapsto \mathbb{P}((-\infty, x])$$

Verteilungsfunktion von $\mathbb{P}$.

- Es gilt:

$$\mathbb{P}((a, b]) = F(b) - F(a)$$

  für $a \leq b \in \mathbb{R}$.

Erinnerung: Allgemeine Verteilungsfunktionen

Definition

Eine Funktion

$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,

ii) F ist monoton steigend,

iii) F ist rechtsseitig stetig,

iv) $\lim\limits_{x \longrightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x \longrightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt heißt Verteilungsfunktion.

- Jede Verteilungsfunktion korrespondiert mit genau einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. (Carathéodory+Vorlesung, Übungsblatt 2 Aufgabe 2)

Aufgabe 1

Sei $\mathbb{P}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion F.

Wann gilt

$$\mathbb{P}((a,b)) = \mathbb{P}((a,b]), \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}([a,b]) = \mathbb{P}((a,b])$$

für $a \leq b \in \mathbb{R}$?

Wie hängt das mit F zusammen?

Wie lassen sich

$$\mathbb{P}((a,\infty)), \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{P}([a,\infty))$$

durch F berechnen?

Unstetigkeitsstellen von Verteilungsfunktionen

Sei F die Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes $\mathbb{P}$ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Dann gilt

$$F(b) - F(a) = \mathbb{P}((a, b]).$$

Zudem ist F rechtsstetig und monoton wachsend, weshalb F in x genau dann unstetig ist, wenn

$$F(x-) < F(x)$$

gilt.

Unstetigkeitsstellen von Verteilungsfunktionen

Sei x eine Unstetigkeitsstelle von F und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$. Dann gilt

$$(x_{n+1}, x] \subseteq (x_n, x], \quad \forall\, n \in \mathbb{N} \quad \text{und} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} (x_n, x] = \{x\},$$

weshalb mit der Stetigkeit von Maßen

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} F(x) - F(x_n) &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((x_n, x]) \\ &= \mathbb{P}(\{x\}) \end{aligned}$$

gilt. Also ist F genau dann in einem Punkt x unstetig, wenn

$$\mathbb{P}(\{x\}) = F(x) - F(x-) > 0$$

gilt.

Die Normalverteilung

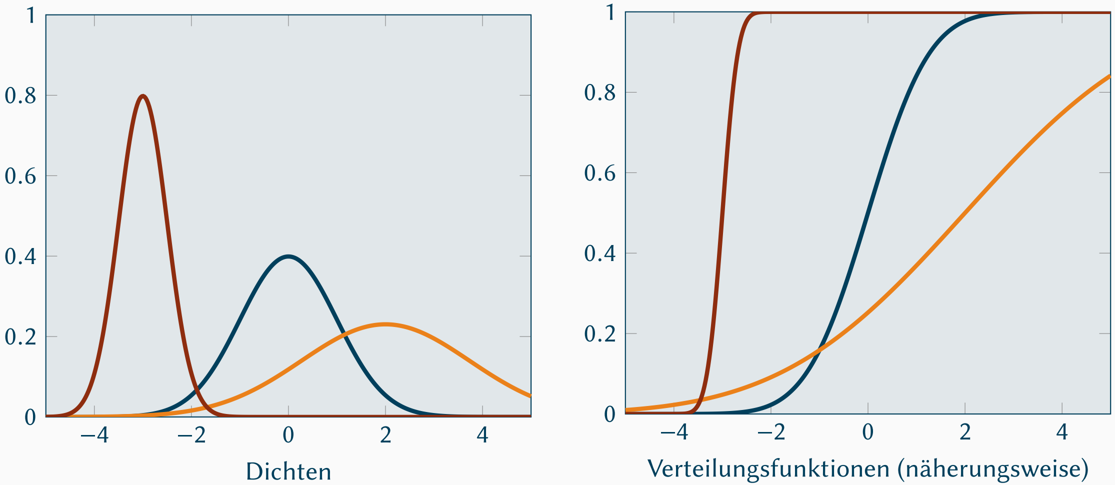
Die Normalverteilung $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit $\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

$$F\colon \mathbb{R} \to [0,1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \, \mathrm{d}x.$$

Welchen Einfluss haben die beiden Parameter μ und σ?

- Die Normierungseigenschaft für Wahrscheinlichkeitsmaße wurde in der letzten Übung für $\mu = 0$ und $\sigma^2 = 1$ gezeigt, der allgemeine Fall folgt per Substitution.

Die Normalverteilung ($\mu = -3$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$ Orange)



Aufgabe 2

Sei für $c \in (0, 1)$ die Dichtefunktion

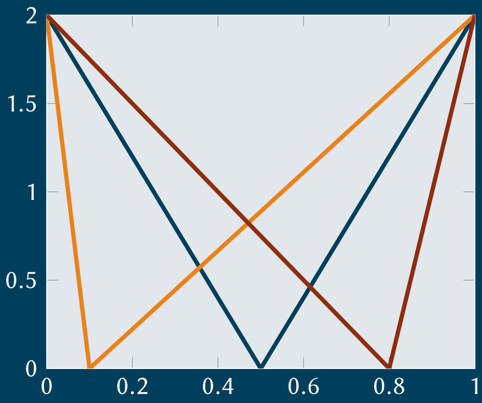
$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_0^+,$$

$$x \mapsto 2\left(1 - \frac{1}{c}x\right)\mathbb{1}_{(0,c]}(x) + 2\left(\frac{1}{1-c}x - \frac{c}{1-c}\right)\mathbb{1}_{(c,1]}(x)$$

gegeben.

Berechne die Verteilungsfunktion von f.

Für welche c hat das korrespondierende W-Maß viel 'Masse' in der Nähe von 1?



$c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot

Dichten vs. Verteilungsfunktionen ($c = 0.1$ Orange, $c = 0.5$ Blau, $c = 0.8$ Rot)