

Stochastik I

2. Große Übung

Niklas Dexheimer

18.09.2019

Definition

Eine Funktion

$$F: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1], \quad x \mapsto F(x),$$

welche die Eigenschaften

- i) $0 \leq F(x) \leq 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$,
- ii) F ist monoton steigend,
- iii) F ist rechtsseitig stetig,
- iv) $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$ und $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$,

erfüllt heißt **Verteilungsfunktion**.

- Auf dem Übungsblatt habt Ihr gezeigt, dass jede Verteilungsfunktion eines Wahrscheinlichkeitsmaßes diese vier Eigenschaften erfüllt.
- Es lässt sich zeigen (siehe Vorlesung), dass jede Verteilungsfunktion nach obiger Definition mit einem Wahrscheinlichkeitsmaß auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ korrespondiert.

Aufgabe 1

Sei

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x),$$

eine stetige (stetig ist i.A. nicht nötig) und integrierbare Funktion, die die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,

erfüllt. Zeige, dass

$$F(t) := \int_{-\infty}^t f(x) dx, \quad t \in \mathbb{R},$$

eine Verteilungsfunktion ist.

Ein Beispiel für eine stetige und integrierbare Funktion f , welche die Eigenschaften

i) $f \geq 0$,

ii) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$,

erfüllt, ist die Funktion

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_0^+, \quad x \mapsto f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}},$$

aber wie zeigt man, dass Eigenschaft ii) erfüllt ist?

Aufgabe 2

Berechne die Verteilungsfunktionen der folgenden Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$:

$$\mu_1 := \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_k,$$

$$\mu_2 := \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \delta_k, \quad p \in (0, 1), n \in \mathbb{N},$$

$$\mu_3 := p \sum_{n=1}^{\infty} (1-p)^{n-1} \delta_n, \quad p \in (0, 1).$$