Stochastik I

1. Große Übung

Niklas Dexheimer

11.09.2019

Die Borelsche σ-Algebra

Definition

Sei die Grundmenge $\Omega = \mathbb{R}$ gegeben und $\mathcal{O}$ die Menge aller offenen Teilmengen von Ω. Dann heißt

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\mathcal{O})$$

die Borelsche σ-Algebra der reellen Zahlen.

- Die Borelsche σ-Algebra ist also die kleinste σ-Algebra, die alle offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ enthält.
- Trotz dieser Definition, hat die Borelsche σ-Algebra viele verschiedene Erzeuger.

Aufgabe 1

Zeige, dass die folgenden Mengensysteme Erzeuger der Borelschen σ-Algebra sind:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}, \\
\mathcal{E}_2 &:= \{[a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}, \\
\mathcal{E}_3 &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a \leq b\}, \\
\mathcal{E}_4 &:= \{(-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{E}_5 &:= \{(-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}, \\
\mathcal{E}_6 &:= \{A \subseteq \mathbb{R} : A \text{ abgeschlossen}\}.
\end{aligned}
$$