Stochastik I

8. Große Übung

Martin Dattge, Leonardo Vela

18.11.2020

$\mathcal{L}^p$-Räume

Definition

$f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ heißt *p*-**fach integrierbar**, falls $\int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty$. Statt 2-fach integrierbar sagt man auch **quadratintegrierbar**, statt 1-fach integrierbar sagt man **integrierbar**.

$$f\ \mu\text{-int.} \overset{\text{alte}}{\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}} \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu < \infty, \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu < \infty \overset{\text{Übung}}{\Leftrightarrow} \int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu < \infty \overset{\text{neue}}{\underset{\text{Def.}}{\Leftrightarrow}} f \text{ int.}$$

Definition

$$\mathcal{L}^p(\mu) := \left\{ f\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}} \,\middle|\, \int_\Omega |f|^p \mathrm{d}\mu < \infty \right\}.$$

Manachmal schreibt man auch $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ oder nur $\mathcal{L}^p$.

Integralungleichungen

Satz (Minkowski-Ungleichung)

Sei $p \geq 1$, so gilt

$$\left(\int_\Omega |f+g|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_\Omega |g|^p \, d\mu\right)^{1/p}.$$

Beide Seiten können den Wert $+\infty$ annehmen.

Satz (Hölder-Ungleichung)

Seien $p, q > 1$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Dann gilt

$$\int_\Omega |fg| \, d\mu \leq \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_\Omega |g|^q \, d\mu\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Aufgabe 1

a) Seien f und g in $\mathcal{L}^p$. Zeige, dass $f + g \in \mathcal{L}^p$.
   Hinweis: Minkowski-Ungleichung.

b) Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ eine positive, messbare Funktion. Wir haben bereits gezeigt, dass $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^n f(k)$ für $\mu := \sum_{k=1}^n \delta_k$ gilt. Zeige, dass für $n \in \mathbb{N}$, $p \geq 1$ folgende Ungleichung gilt:

$$\left(\sum_{k=1}^n f(k) \right)^p \leq n^{p-1} \sum_{k=1}^n f(k)^p.$$

   Hinweis: Hölder-Ungleichung.

Die Gammaverteilung

Die Gammaverteilung $\Gamma(\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta > 0$ ist definiert als das Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit Verteilungsfunktion

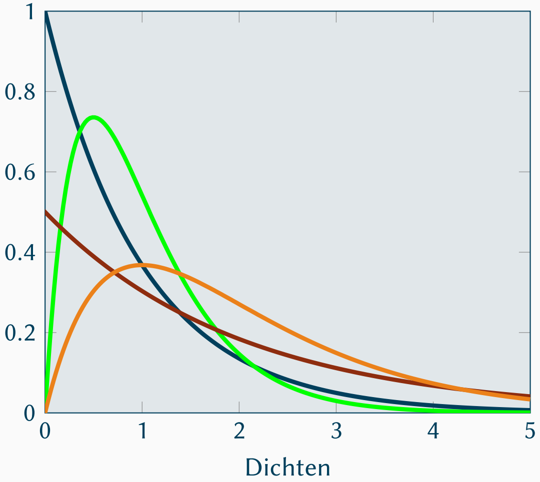
$$F\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1], \quad t \mapsto \int_{-\infty}^{t} \frac{\beta^\alpha x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}}{\Gamma(\alpha)} \mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) \mathrm{d}x.$$

Hierbei bezeichnet

$$\Gamma\colon (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty), \quad x \mapsto \int_{0}^{\infty} t^{x-1} \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t$$

die Gammafunktion.

Die Gammaverteilung ($\alpha = 1, \beta = 0.5$ Rot, $\alpha = 1, \beta = 1$ Blau, $\alpha = 2, \beta = 1$ Orange, $\alpha = 2, \beta = 2$ Grün)



Aufgrund der Definition der Dichte der Gammaverteilung sieht man direkt den Effekt der beiden Parameter α und β :

- α kann als Formparameter interpretiert werden.
- β kann als Skalierungsfaktor interpretiert werden.

Aufgabe 2

a) Zeige, dass für alle $\alpha > 0$ gilt: $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$.

b) Berechne das erste Moment
$$\int_{\mathbb{R}} x \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$
der Gamma-Verteilung für $\alpha = 1, \beta > 0$.

c) Zusatz für die schnellen Rechner: Berechne auch noch das zweite Moment
$$\int_{\mathbb{R}} x^2 \, \mathrm{d}\mathbb{P}$$
der Gamma-Verteilung für $\alpha = 1, \beta > 0$.

d) Welcher Verteilung scheint die $\Gamma(1, \beta)$ Verteilung sehr ähnlich zu sein?
Hinweis: In a)-c) könnte die Partielle Integration hilfreich sein.