Stochastik I

7. Große Übung

Martin Dattge, Leonardo Vela

11.11.2020

Rechenregeln für absolutstetige Verteilungen

Satz (Integrale für absolutstetige Verteilungen)

Sei $\mathbb{P}_F$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ und F habe Dichte f. Dann gilt für $g\colon \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ Borel-messbar:

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_F \text{ ist wohldefiniert} \quad \Leftrightarrow \quad \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx \text{ ist wohldefiniert}$$

und, wenn die Integrale wohldefiniert sind,

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_F = \int_{\mathbb{R}} g(x)f(x)dx.$$

Rechenregeln für diskrete Verteilungen

Satz (Integrale für diskrete Verteilungen)

Sei $\mathbb{P}_F$ *ein Maß auf* $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ *und* F *sei diskret, d. h.*

$$F(t) = \sum_{k=1}^{N} p_k \mathbf{1}_{[a_k,\infty)}(t), \quad t \in \mathbb{R},$$

mit $N \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, $a_1, \ldots, a_N \in \mathbb{R}$ *und* $\sum_{k=1}^{N} p_k = 1$. *Dann gilt für* $g : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}$ *messbar:*

$$g \ \mathbb{P}_F\text{-integrierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{k=1}^{N} |g(a_k)| p_k < \infty$$

und, wenn g $\mathbb{P}_F$*-integrierbar ist,*

$$\int_{\mathbb{R}} g d\mathbb{P}_F = \sum_{k=1}^{N} g(a_k) p_k.$$

Aufgabe 1

a) Sei auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ das W-Maß $\mathbb{P}_1 \sim \mathrm{Geo}(p)$ mit $p \in (0,1)$ gegeben, also

$$\mathbb{P}_1 := \sum_{k=1}^{\infty} p(1-p)^{k-1} \delta_k.$$

Berechne das erste Moment $\int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}\mathbb{P}_1$.

b) Sei jetzt $\mathbb{P}_2 \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$, also

$$\mathbb{P}_2 := \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \delta_k.$$

Berechnet das erste Moment $\int_{\mathbb{R}} x \mathrm{d}\mathbb{P}_2$.

Satz (Markov-Ungleichung für Polynome)

Sei $\mathbb{P}_F$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, sodass für eine gerade natürliche Zahl $2k$ das $2k$-te Moment existiert ist. Dann gilt, für alle $a > 0$.

$$\mathbb{P}_F\big([-a, a]\big) \geq 1 - \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mathbb{P}_F(x)}{a^{2k}}.$$

Gleichbedeutend (Gegenereigniss) gilt

$$\mathbb{P}_F\big([-a, a]^C\big) \leq \frac{\int_{\mathbb{R}} x^{2k} d\mathbb{P}_F(x)}{a^{2k}}.$$

Aufgabe 2

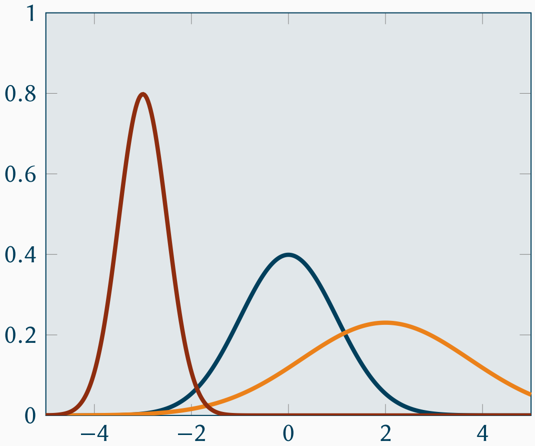
Sei der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ gegeben und $\mathbb{P}_3 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, mit $\sigma > 0$.

a) Zeige, dass $\int_{\mathbb{R}} x^2 \mathrm{d}\mathbb{P}_3 = \sigma^2$ gilt.
   Hinweis: Partielle Integration.

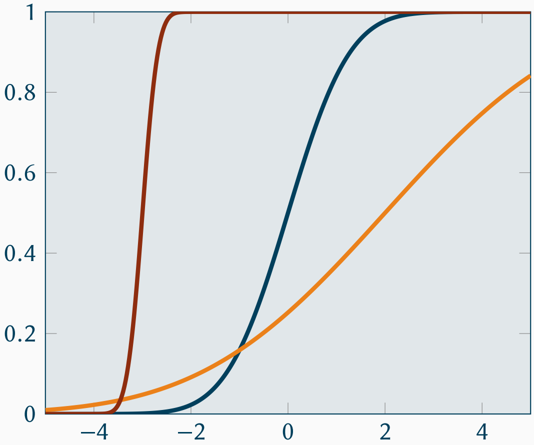
b) Sei $\sigma = 0.01$. Für welche $a > 0$ gilt $\mathbb{P}_3([-a, a]) \geq 0.99$?
   Hinweis: Markov-Ungleichung für $k = 1$.

c) In der Vorlesung wurde gezeigt, dass für $\sigma = 0.1$ $\mathbb{P}_3([-a, a]) \geq 0.99$ für $a \geq 1$ gilt. Vergleicht dieses Ergebnis mit eurem Ergebnis in b).

Die Normalverteilung ($\mu = -3$, $\sigma^2 = \frac{1}{4}$ Rot, $\mu = 0$, $\sigma^2 = 1$ Blau, $\mu = 2$, $\sigma^2 = 3$ Orange)



Dichten



Verteilungsfunktionen (näherungsweise)