Stochastik I

5. Große Übung

Martin Dattge, Leonardo Vela

28.10.2019

Erinnerung: Messbarkeit von Funktionen

Definition

Seien $(\Omega, \mathcal{A}), (\Omega', \mathcal{A}')$ messbare Räume und $f : \Omega \to \Omega'$. Dann heißt f $(\mathcal{A} - \mathcal{A}')$-messbar, falls

$$f^{-1}(A') \in \mathcal{A}$$

für alle $A' \in \mathcal{A}'$ gilt.

- Ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathcal{A}'$, dann ist die Messbarkeit von f äquivalent zu

$$E \in \mathcal{E} \implies f^{-1}(E) \in \mathcal{A}. \quad \text{(Satz 2.1.4.)}$$

- Der obige Satz ist sehr nützlich um die Messbarkeit von Funktionen nachzuweisen.

Erinnerung: Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ bzw. $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}})$

Zusammen haben wir schon gezeigt, dass zum Beispiel die folgenden Mengensysteme Erzeuger von $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ sind:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_1 &:= \{(-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_2 &:= \{(-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_3 &:= \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_4 &:= \{[a, b] : a, b \in \mathbb{R}, a < b\},\\
\mathcal{E}_5 &:= \{(t, \infty) : t \in \mathbb{R}\},\\
\mathcal{E}_6 &:= \{[t, \infty) : t \in \mathbb{R}\}.
\end{aligned}$$

Mit Satz 2.1.4. müssen wir um die Messbarkeit einer $\mathbb{R}$-wertigen Funktion nachzuweisen, also nur die Urbilder der Mengen in einem dieser Mengensysteme betrachten.

Messbarkeit reellwertiger Funktionen

Wenn $f : \Omega \to \mathbb{R}$ eine Funktion von einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{A})$ nach $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ist, reicht es also zum Beispiel aus zu zeigen, dass die Menge

$$\{f < t\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < t\} = f^{-1}((-\infty, t))$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ in $\mathcal{A}$ enthalten ist, um folgern zu können, dass f $\mathcal{A} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$–messbar ist.

Messbarkeit numerischer Funktionen

Für numerische Funktionen (also $f : \Omega \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$) funktioniert das analog, da nach der Vorlesung

$$\mathcal{E}_5 := \{[-\infty, t] : t \in \mathbb{R}\}, \quad \mathcal{E}_6 := \{[-\infty, t) : t \in \mathbb{R}\},$$

Erzeuger von $\mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}) := \{B \subseteq \bar{\mathbb{R}} : B \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ sind.

Aufgabe 1

Sei $(\Omega, \mathcal{A})$ ein messbarer Raum und $(f_n, n \in \mathbb{N})$ eine Folge messbarer numerischer Funktionen mit $f_n \colon \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Zeige, dass die für $\omega \in \Omega$ punktweise definierten Funktionen

$$g_1(\omega) := \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_2(\omega) := \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega),$$

$$g_3(\omega) := \liminf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega), \quad g_4(\omega) := \limsup_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega),$$

messbar sind. (Die Ausdrücke sind wohldefiniert, da bei numerischen Funktionen auch die Werte $+\infty, -\infty$ erlaubt sind.)

b) Zeige, dass falls für jedes $\omega \in \Omega$ der Grenzwert

$$f(\omega) := \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$$

in $\bar{\mathbb{R}}$ existiert, auch f eine messbare numerische Funktion ist.

Messbarkeit und Approximierbarkeit

- Nach Proposition 3.1.6. existiert für jede nichtnegative messbare Funktion eine Folge von positiven einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$.
- Nach Aufgabe 1 ist aber auch der Grenzwert einer monoton wachsenden Folge (in $\bar{\mathbb{R}}$) von positiven einfachen Funktionen messbar, da einfache Funktionen messbar sind.
- Es besteht also eine 1:1 Korrespondenz zwischen messbaren, nichtnegativen und durch wachsende Folgen von positiven, einfachen Funktionen approximierbaren Funktionen.
- Diese Korrespondenz gilt mit der üblichen Zerlegung $f = f^+ - f^-$ dann auch für allgemeine messbare numerische Funktionen und Funktionen, deren Positiv- und Negativteil durch wachsende Folgen von positiven, einfachen Funktionen approximierbar sind.

Das Lebesgue-Integral: Einfache Funktionen

Sei $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\mathcal{E} := \{f : f \text{ einfache Funktion}\}$ bzw. $\mathcal{E}^+ := \{f : f \text{ einfache positive Funktion}\}$. Hierbei heißt eine Funktion einfach, falls $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \overline{\mathbb{R}}$ und $A_1, \ldots, A_n$ existieren, sodass die A_k paarweise disjunkt sind mit $\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega$ und

$$f(\omega) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathbb{1}_{A_k}(\omega), \quad \forall \omega \in \Omega.$$

Für ein $f \in \mathcal{E}^+$ ist dann das Lebesgue-Integral definiert durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mu(A_k).$$

Das Lebesgue-Integral: Nichtnegative, messbare Funktionen

Für eine nichtnegative, messbare Funktion $f : (\Omega, \mathcal{A}) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ definieren wir dann das Lebesgue-Integral durch

$$\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu := \sup \left\{ \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu : \mathrm{g \ einfach}, 0 \leq g \leq f \right\}.$$

Dieser Ausdruck ist erstmal unhandlich, aber direkt wohldefiniert.
Nach der Vorlesung existiert zu jeder nichtnegativen messbaren numerischen Funktion f eine Folge von einfachen Funktionen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_n \uparrow f$ punktweise und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Diese äquivalente Darstellung ist deutlich praktischer für Beweise.

Das Lebesgue-Integral: Integrierbare Funktionen

Sei $f : (\Omega, \mathcal{A}) \longrightarrow (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ eine messbare numerische Funktion. Dann sind nach der Vorlesung $f^+ := \max\{f, 0\}, f^- := -\min\{f, 0\}$ messbare und nichtnegative Funktionen. Falls

$$\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu < \infty, \quad \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu < \infty,$$

gilt, heißt f integrierbar und das Lebesgue-Integral für eine integrierbare Funktion f ist definiert durch

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu.$$

Wir schränken uns hierbei auf integrierbare Funktionen ein, um den Fall “$\infty - \infty$“ zu vermeiden.

Aufgabe 2

Seien der messbare Raum $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, verschiedene reelle Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ mit $n \in \mathbb{N}$ und das Maß μ auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mit

$$\mu := \sum_{k=1}^{n} \delta_{x_k}$$

gegeben. Zeige, dass für eine integrierbare Funktion $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \to (\bar{\mathbb{R}}, \mathcal{B}(\bar{\mathbb{R}}))$ folgendes erfüllt ist:

a) $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\delta_{x_0} = f(x_0), \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$,

b) $\int_{\mathbb{R}} f \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)$.