4. Funktionale von Markovprozessen und partielle Differentialgleichungen

4.1 Markovprozesse und Martingale

Im folgenden sei $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ stets filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum.

Definition ($(\mathcal{F}_t)$ - Martingal)

Ein reellwertiger, stochastischer Prozeß $X = (X_t)_{t \geq 0}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ heißt $(\mathcal{F}_t)$ - Martingal, falls

(i) X an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ adaptiert ist,

(ii) $\mathbb{E}[|X_t|] < \infty$ für alle $t \geq 0$

(iii) $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] = X_s$ $\mathbb{P}$-f.s. für alle $0 \leq s < t < \infty$

Ein $(\mathcal{F}_t)$ - Submartingal bzw. $(\mathcal{F}_t)$ - Supermartingal ist in analoger Weise definiert, wobei nur (iii) zu ersetzen ist durch $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \geq X_s$ bzw. $\mathbb{E}[X_t \mid \mathcal{F}_s] \leq X_s$.

Bsp. 24: Sei Z eine integrierbare Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$. Definiere $X_t := \mathbb{E}[Z \mid \mathcal{F}_t]$, $t \geq 0$. Dann ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

Aufgabe: Sei X ein Lévy-Prozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$.

Zeige, daß

(i) falls $X_t \in L^1(\mathbb{P})$ für alle $t \geq 0$ der stochastische Prozeß $(X_t - \mathbb{E}[X_t])_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

(ii) falls $X_t \in L^2(\mathbb{P})$ für alle $t \geq 0$ der stochastische Prozeß $(X_t^2 - \mathbb{E}[X_t^2])_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

(iii) falls für ein $\alpha \in \mathbb{R}$ $\mathbb{E}[e^{\alpha X_t}] < \infty$ für alle $t \geq 0$ der stochastische Prozeß $\left(e^{\alpha X_t} / \mathbb{E}[e^{\alpha X_t}]\right)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

Aufgabe: Sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine eindimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$.

Zeige, daß

(i) für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ $X^\alpha := \left(\exp\left(\alpha B_t - \frac{1}{2}\alpha^2 t\right)\right)_{t\geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

(ii) für alle $k \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$ $\left(\frac{d^k}{d\alpha^k} X_t^\alpha \right)_{t \geq 0}$ ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal ist.

Aufgabe: Sei N ein Poissonprozeß mit Intensität $\lambda > 0$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Zeige, daß

$$\left((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t \right)_{t\geq 0} \quad \text{und} \quad \left(\exp\left(\alpha N_t - \lambda t (e^\alpha - 1)\right)\right)_{t \geq 0}$$

jeweils $(\mathcal{F}_t)$-Martingale sind.

Satz 4.1: Sei X ein progressiv meßbarer, $(E,\mathcal{E})$-wertiger Markovprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0})$ bzgl. der Verteilungen $(\mathbb{P}_x)_{x\in E}$ mit Generator $(G, \mathcal{D}(G))$, d.h. G ist der Generator der auf $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}(E)$ eingeschränkten zugehörigen Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Dann gilt:

a) Für jedes $x\in E$ und $f\in \mathcal{D}(G)$ ist

$$M_t^f := f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Gf)(X_r)\,dr \quad , \quad t\geq 0 \qquad (*)$$

ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

b) Für jedes $x\in E$, $\lambda > 0$ und $f\in R_\lambda \mathcal{B}_0$ ist

$$M_t^{f,\lambda} := e^{-\lambda t}(R_\lambda f)(X_t) - (R_\lambda f)(X_0) + \int_0^t e^{-\lambda r} f(X_r)\,dr \quad , \quad t\geq 0 \qquad (**)$$

ein $(\mathcal{F}_t)$-Martingal.

<u>Beweis:</u> a) Da $f \in D(G)$ und somit nach Satz 3.5 $Gf \in B_0$ sowie X progressiv ist, ist das Integral in $(*)$ wohldefiniert, stetig, adaptiert und gleichmäßig beschränkt auf kompakten Zeitintervallen. Zudem ist $t \mapsto f(X_t)$ beschränkt und progressiv. Folglich ist M^f adaptiert und integrierbar.

<u>Zu zeigen:</u> $\quad \mathbb{E}_x[M_t^f \mid \mathcal{F}_s] = M_s^f \quad \mathbb{P}_x$-f.s. $\quad \forall\, 0 \le s < t < \infty$

Sei also $0 \le s < t < \infty$. Dann gilt $\mathbb{P}_x$-f.s.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[M_t^f \mid \mathcal{F}_s] &= \mathbb{E}_x\left[f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Gf)(X_r)\,dr \,\Big|\, \mathcal{F}_s \right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[\left(f(X_{t-s}) - f(X_0) - \int_0^{t-s} (Gf)(X_r)\,dr \right) \circ \theta_s \,\Big|\, \mathcal{F}_s \right] + M_s^f \\
&= \mathbb{E}_{X_s}[f(X_{t-s})] - f(X_s) - \int_0^{t-s} \mathbb{E}_{X_s}[(Gf)(X_r)]\,dr + M_s^f \\
&= (P_{t-s}f)(X_s) - f(X_s) - \int_0^{t-s} P_r(Gf)(X_s)\,dr + M_s^f
\end{aligned}
$$

Aus dem Satz 3.5 folgt zudem, daß

$$P_{t-s}f - f = \int_0^{t-s} P_r G f \, dr \qquad \forall f \in D(G)$$

Also erhält man $\mathbb{E}_x[M_t^f \mid \mathcal{F}_s] = M_s^f \quad \mathbb{P}_x$-f.s.

b) Übung.

$\square$

Satz 4.2. (Dynkin-Formel) Sei X ein starker Markovprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ mit Werten in einem Polnischen Raum $(E, \mathcal{B}(E))$. Bezeichne mit $(G, D(G))$ den Generator der zugehörigen Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ auf $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}(E)$. Dann gilt für jedes $f \in D(G)$ und jede $(\mathcal{F}_t)$-optionale Zeit S mit $\mathbb{E}_x[S] < \infty$ für alle $x \in E$

$$\mathbb{E}_x[f(X_S)] = f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^S (Gf)(X_r)\, dr\right].$$

Beweis: Schritt 1: Da nach Lemma 3.6 und Satz 3.7 $\mathcal{D}(G) = R_\lambda B_0$ ist für jedes $\lambda > 0$, gibt es somit für $f \in \mathcal{D}(G)$ und $\lambda > 0$ ein $g \in B_0$ mit $f = R_\lambda g$. Weiterhin folgt aus Satz 3.7 und dem Satz von Fubini, daß

$$f(x) = (L_\lambda g)(x) = \int_0^\infty e^{-\lambda r} \underbrace{(P_r g)(x)}_{= \mathbb{E}_x[g(X_r)]} dr = \mathbb{E}_x\left[\int_0^\infty e^{-\lambda r} g(X_r)\, dr\right] \quad \forall x \in E \qquad (*)$$

Zu zeigen: $\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda S} f(X_S) \mathbb{1}_{S<\infty}\right] = f(x) - \mathbb{E}_x\left[\int_0^S e^{-\lambda r} g(X_r)\, dr\, \mathbb{1}_{S<\infty}\right]$

Aus Satz 2.12 ergibt sich nun für jede optionale Zeit S mit $\mathbb{P}_x[S<\infty] = 1$ $\forall x \in E$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda S} f(X_S)\, \mathbb{1}_{S<\infty}\right] &\overset{(*)}{=} \mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda S} \mathbb{1}_{S<\infty}\, \mathbb{E}_{X_S}\left[\int_0^\infty e^{-\lambda r} g(X_r)\, dr\right]\right] \\
&\overset{\text{Satz 2.12}}{=} \mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda S} \mathbb{1}_{S<\infty}\, \mathbb{E}_x\left[\left(\int_0^\infty e^{-\lambda r} g(X_r)\, dr\right) \circ \theta_S \,\middle|\, \mathcal{F}_S^+\right]\right] \\
&= \mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda S} \mathbb{1}_{S<\infty} \int_0^\infty e^{-\lambda r} g(X_{S+r})\, dr\right] \\
&\overset{(*)}{=} f(x) - \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{S<\infty} \int_0^S e^{-\lambda r} g(X_r)\, dr\right]
\end{aligned}$$

<u>Schritt 2</u>: Sei nun S eine optionale Zeit mit $\mathbb{E}_x[S] < \infty$ $\forall x \in E$. Weiterhin gilt

$$f = R_\lambda g \iff g = (\lambda I - G) f = \lambda f - Gf$$

Da zudem f und Gf beschränkt sind, ergibt sich somit

$$\mathbb{E}_x\left[\left| \int_0^S e^{-\lambda r} \left(\lambda f(X_r) - (Gf)(X_r)\right) dr \right|\right] \leq \left(\|\lambda f\| + \|Gf\|\right) \mathbb{E}_x[S] < \infty$$

Aus dem Satz von Lebesgue folgt daher

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_x[f(X_S)] &= \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathbb{E}_x\left[e^{-\lambda S} f(X_S) \mathbb{1}_{S<\infty}\right] \\
&= \lim_{\lambda \downarrow 0} \left(f(x) - \mathbb{E}_x\left[\mathbb{1}_{S<\infty} \int_0^S e^{-\lambda r} \left(\lambda f(X_r) - (Gf)(X_r)\right) dr\right]\right) \\
&= f(x) + \mathbb{E}_x\left[\int_0^S (Gf)(X_r)\, dr\right].
\end{aligned}$$

$\square$

<u>Bem.</u>: Ist M^f ein rechtsstetiger Prozeß (z.B. $(X_t)_{t\geq 0}$ ist rechtsstetig und f ist stetig), so folgt die obige Aussage aus dem optionalen Stoppsatz für Martingale.

4.2. Markovprozesse und Randwertprobleme

Dirichletproblem: Sei $D \subseteq \mathbb{R}^d$ ein offenes, beschränktes Gebiet (mit hinreichend glatten Rand) und $g: \bar{D} \to \mathbb{R}$, $\varphi: \partial D \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Finde eine Funktion $f \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ so, daß

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\Delta f = -g & \text{auf } D \\ f = \varphi & \text{auf } \partial D \end{cases}$$

Satz 4.3 Angenommen $f \in C^2(D) \cap C(\bar{D})$ ist eine Lösung des Dirichletproblems. Weiterhin sei $B = (B_t)_{t \geq 0}$ eine d-dimensionale Brownsche Bewegung auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (P_x)_{x \in \mathbb{R}^d})$ und $T_{D^c} := \inf\{t \geq 0 : B_t \notin D\}$. Dann gilt

$$f(x) = \mathbb{E}_x\left[\varphi(B_{T_{D^c}}) + \int_0^{T_{D^c}} g(B_r)\,dr\right], \quad x \in \bar{D}.$$

Insbesondere ist die Lösung f eindeutig.

Beweis: Da D^c abgeschlossen ist, ist nach Satz 1.8 T_{D^c} eine $(\mathcal{F}_t)$-Stoppzeit.

Zu zeigen: $\mathbb{E}_x[T_{D^c}] < \infty \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

Betrachte hierzu die folgende (Lyapunov-) Funktion $h(x) = -\mu e^{x_1}$ mit

$\mu := 2\exp(-\min_{x\in\bar{D}} x_1)$. Dann gilt für $x \in D$

$$(Gh)(x) = \frac{1}{2}(\Delta h)(x) = -\frac{\mu}{2}\exp(x_1) \leq -\frac{\mu}{2}\exp(\min_{x\in\bar{D}} x_1) = -1$$

Aus dem Satz 4.2. folgt somit für die beschränkte optionale Zeit $T_{D^c} \wedge t$ und $x \in D$

$$\mathbb{E}_x[T_{D^c} \wedge t] \leq \mathbb{E}_x\left[\int_0^{T_{D^c}\wedge t} (-Gh)(B_r)\,dr\right]$$

$$= h(x) - \mathbb{E}_x\left[h\left(B_{T_{D^c}\wedge t}\right)\right] \leq 2\max_{y\in\bar{D}} |h(y)|$$

Somit folgt aus dem Lemma von Fatou

$$\mathbb{E}_x[T_{D^c}] \leq \liminf_{t\to\infty} \mathbb{E}_x[T_{D^c}\wedge t] \leq 2\max_{y\in\bar{D}} |h(y)| < \infty, \quad x \in D$$

Weiterhin ist $\mathbb{P}_x[T_{D^c} = 0] = 1$ für alle $x \in D^c$. Folglich ist $\mathbb{E}_x[T_{D^c}] < \infty \ \forall x \in \mathbb{R}^d$.

Aus dem Satz 4.2 folgt somit für $x \in \bar{D}$

$$f(x) = \mathbb{E}_x \Big[f(\underbrace{B_{T_{D^c}}}_{\in \partial D}) - \int_0^{T_{D^c}} \underbrace{(Gf)(B_r)}_{-g(B_r) \ \forall\, 0 \le r < T_{D^c}} dr \Big]$$

$$= \mathbb{E}_x \Big[\varphi(B_{T_{D^c}}) + \int_0^{T_{D^c}} g(B_r)\, dr \Big]$$

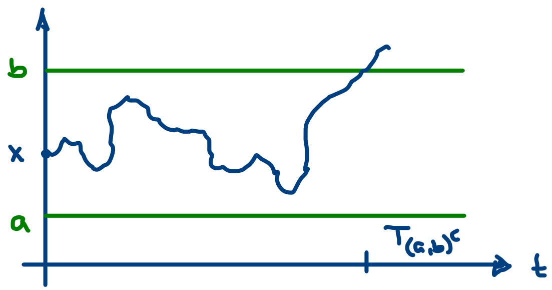
$\square$

__Bsp. 25:__ Sei $d=1$ und $D=(a,b)$ mit $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$. Betrachte nun das folgende Dirichletproblem:

$$\begin{cases} \frac{1}{2} f''(x) = -1 \quad , x \in (a,b) \\ f(a) = f(b) = 0 \end{cases}$$

dessen Lösung gegeben ist durch $f(x) = (x-a)(b-x)$, $x \in [a,b]$. Damit ergibt sich aus Satz 4.4

$$\mathbb{E}_x [T_{(a,b)^c}] = (x-a)(b-x) \quad \text{für } x \in (a,b)$$



Aufgabe: Bestimme für die Wright-Fisher Diffusion, d.h. für den Markovprozeß $(X_t)_{t\geq 0}$ mit Werten in $E=[0,1]$ und Generator

$$D(G)=C^2([0,1]), \qquad Gf(x)=\frac{1}{2}x(1-x)f''(x) \quad \text{für } f\in D(G)$$

die erwartete Austrittszeit $T_{(0,1)^c}=\inf\{t\geq 0 : X_t\notin(0,1)\}$ aus dem offenen Intervall $(0,1)$.

Bsp. 26: Sei $d=1$ und $D=(a,b)$ mit $a,b\in\mathbb{R}$ und $a<b$. Betrachte nun

$$\begin{cases} \frac{1}{2}f''(x)=0 & , \quad x\in(a,b) \\ f(x)=\varphi(x) & , \quad x\in\{a,b\} \end{cases}$$

Die Lösung dieses Dirichletproblems ist gegeben ist durch

$$f(x)=\frac{x-a}{b-a}\varphi(b)+\frac{b-x}{b-a}\varphi(a) \qquad , \quad x\in[a,b]$$

Damit ergibt sich aus Satz 4.4

$$\mathbb{E}_x\left[\varphi\left(B_{T_{(a,b)^c}}\right)\right] = \frac{x-a}{b-a}\,\varphi(b) + \frac{b-x}{b-a}\,\varphi(a)$$

Insbesondere erhält man hieraus für $\varphi(x) = \mathbb{1}_a(x)$ und

$$T_c := \inf\{t \geq 0 : B_t = c\}, \qquad c \in \mathbb{R}$$

folgende Austrittswahrscheinlichkeiten:

$$\mathbb{P}_x[T_a < T_b] = \frac{b-x}{b-a} = 1 - \mathbb{P}_x[T_b < T_a], \qquad x \in (a,b)$$

Aufgabe: Bestimme für eine d-dimensionale Brownsche Bewegung die erwartete Austrittszeit aus einem offenen Ball mit Radius $R \in (0,\infty)$, d.h.

$$\mathbb{R}^d \supseteq D = D_R := \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\|_2 < R\}.$$

4.3. Halbgruppen und Evolutionsgleichungen

Satz 4.4: (Cauchy-Anfangswertproblem) Sei $(P_t)_{t \geq 0}$ eine Halbgruppe linearer Kontraktionen auf einem Banachraum B mit Generator $(G, D(G))$. Weiterhin sei $f \in D(G)$ und $g : [0,\infty) \to B_0$ stetig differenzierbar im starken Sinne.

Dann hat das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = G u(t) + g(t), & t \geq 0 \\ u(0) = f \end{cases} \qquad (*)$$

genau eine Lösung $u : [0,\infty) \to D(G)$. Diese besitzt die Darstellung

$$u(t) = P_t f + \int_0^t P_{t-s}\, g(s)\, ds, \quad t \geq 0. \qquad (**)$$

Bem.: Unter einer Lösung von (*) versteht man eine Abbildung $u : [0,\infty) \to D(G)$

so daß

$$\frac{d}{dt} u(t) := \underset{h \downarrow 0}{s\text{-}\lim} \frac{u(t+h) - u(t)}{h} \quad , \quad t \geq 0$$

existiert, stark stetig in t ist und der Gleichung (*) genügt.

__Beweis:__ **Schritt 1:** (Eindeutigkeit) Angenommen u_1 und u_2 wären zwei verschiedene Lösungen von (*). Dann löst die Abbildung $v := u_1 - u_2 : [0,\infty) \to D(G)$ das Anfangswertproblem

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v(t) = G v(t) & , \quad t \geq 0 \\ v(0) = 0 & \end{cases}$$

__Zu zeigen:__ $\| v(t) \| = 0 \qquad \forall\, t \geq 0$

Fixiere ein $T > 0$. Nach Voraussetzung ist $Gu : [0,\infty) \to B$ stark stetig. Insbesondere ist die Abbildung $[0,T] \ni t \mapsto Gv(t)$ gleichmäßig stark stetig, d.h. für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$:

$$\| Gv(t) - Gv(s) \| < \frac{\varepsilon}{T} \qquad \forall \; s,t \in [0,T] \text{ mit } |s-t| < \delta$$

Sei nun $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$ eine Partition von $[0,T]$ mit $|t_k - t_{k-1}| < \delta$ für alle $k = 1, \dots, n$. Dann folgt, da $v(t) \in D(G) = R_\lambda B_0$ für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned}
\|v(T)\| - \|v(0)\| &= \sum_{k=1}^{n} \|v(t_k)\| - \|v(t_{k-1})\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\| R_{(t_k - t_{k-1})^{-1}} \|}_{\leq (t_k - t_{k-1})} \, \left\| \left(\frac{1}{t_k - t_{k-1}} I - G \right) v(t_k) \right\| - \|v(t_{k-1})\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \left\| v(t_k) - \int_{t_{k-1}}^{t_k} Gv(t_k)\, ds \right\| - \Big\| v(t_k) - \underbrace{\int_{t_{k-1}}^{t_k} Gv(s)\, ds}_{= v(t_k) - v(t_{k-1})} \Big\| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} \| Gv(s) - Gv(t_k) \| \, ds < \varepsilon
\end{aligned}$$

Da $\|v(0)\| = 0$ und $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung.

<u>Schritt 2:</u> (Existenz) Betrachte die Abbildung $(**)$, d.h.

$$u(t) := P_t f + \int_0^t P_{t-s}\, g(s)\, ds \qquad , \quad t \geq 0$$

<u>Zu zeigen:</u> u löst das Anfangswertproblem $(*)$

Da $f \in D(G)$ ist nach Satz 3.5 $P_t f \in D(G)$ und es gilt $G P_t f = P_t G f$. Weiterhin erhält man

$$\begin{aligned}\int_0^t P_{t-s}\, g(s)\, ds &= \int_0^t P_{t-s} \left(g(0) + \int_0^s g'(r)\, dr \right) ds \\ &= \int_0^t P_{t-s}\, g(0)\, ds + \int_0^t \int_r^t P_{t-s}\, g'(r)\, ds\, dr \\ &= \underbrace{\int_0^t P_s\, g(0)\, ds}_{\in D(G)} + \int_0^t \underbrace{\int_0^{t-r} P_s\, g'(r)\, ds}_{\in D(G) \quad \forall r \in [0,t]} dr\end{aligned}$$

Folglich ist $u(t) \in D(G)$ für jedes $t \geq 0$.

Zudem gilt

$$\frac{d}{dt} u(t) = \frac{d}{dt} P_t f + \frac{d}{dt} \int_0^t P_{t-s} g(s) ds$$

$$= G P_t f + \frac{d}{dt} \left(\int_0^t P_s g(0) ds + \int_0^t \int_0^{t-r} P_s g'(r) ds\, dr \right)$$

$$= G P_t f + P_t g(0) + \int_0^t P_{t-r} g'(r)\, dr$$

$$= G u(t) - G \left(\int_0^t P_s g(0)\, ds + \int_0^t \int_0^{t-r} P_s g'(r) ds\, dr \right) + P_t g(0) + \int_0^t P_{t-r} g'(r) dr$$

Aus Satz 3.5 folgt, daß

$$G \left(\int_0^t P_s g(0) ds \right) = P_t g(0) - g(0)$$

ist. Betrachte daher nun

$$\frac{1}{h} (P_h - I) \int_0^t \int_0^{t-r} P_s g'(r) ds\, dr = \int_0^t \frac{1}{h} \left(\int_h^{t-r+h} P_s g'(r) ds - \int_0^{t-r} P_s g'(r) ds \right) dr$$

$$= \int_0^t \Bigg(\underbrace{\frac{1}{h} \int_{t-r}^{t-r+h} P_s g'(r) ds}_{\to P_{t-r} g'(r)} - \underbrace{\frac{1}{h} \int_0^h P_s g'(r) ds}_{\to g'(r)} \Bigg) dr$$

Somit ergibt sich aus dem Satz von Lebesgue

$$G\left(\int_0^t \int_0^{t-r} P_s g'(r)\, ds\, dr\right) = \lim_{h\downarrow 0} \frac{1}{h}(P_h - I) \int_0^t \int_0^{t-r} P_s g'(r)\, ds\, dr$$

$$= \int_0^t P_{t-r}\, g'(r)\, dr - \int_0^t g'(r)\, dr$$

$$= \int_0^t P_{t-r}\, g'(r)\, dr - (g(t) - g(0))$$

Daraus folgt schließlich

$$\frac{d}{dt} u(t) = G u(t) - G\left(\int_0^t P_s g(0)\, ds + \int_0^t \int_0^{t-r} P_s g'(r)\, ds\, dr\right) + P_t g(0) + \int_0^t P_{t-r}\, g'(r)\, dr$$

$$= G u(t) + g(t),$$

d.h. u ist differenzierbar und löst das Anfangswertproblem $(*)$

$\square$

<u>Frage:</u> Besitzt die Lösung des Anfangswertproblems $(*)$ auch eine probabilistische Darstellung?

Korollar 4.5: Sei X ein progressiv meßbarer Markovprozeß auf $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{P}_x)_{x\in E})$ mit Werten in einem Polnischen Raum $(E, \mathcal{B}(E))$. Weiterhin sei $(G, \mathcal{D}(G))$ der Generator der zugehörigen Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ auf $B_0 \subseteq \mathcal{B}(E)$. Dann ist für $f \in \mathcal{D}(G)$ und $g: [0,\infty) \to B_0$ stetig differenzierbar im starken Sinne

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x\left[f(X_t) + \int_0^t g(t-s, X_s)\, ds \right]$$

die eindeutige Lösung des Anfangswertproblems

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} u(t) = Gu(t) + g(t) & , \; t \geq 0 \\ u(0) = f \end{cases}$$

Notation: Bezeichne mit $u(t,x) = u(t)(x)$ und $g(t,x) = g(t)(x)$.

Beweis: Da $g : [0,\infty) \times E \to \mathbb{R}$ im ersten Argument stetig und im zweiten Argument meßbar ist, folgt daß g $(\mathcal{B}([0,\infty)) \otimes \mathcal{B}(E), \mathcal{B}(\mathbb{R}))$-meßbar und nach Voraussetzung beschränkt. Somit ist das Integral wohldefiniert. Weiterhin folgt aus Satz 4.4

$$
\begin{aligned}
u(t,x) &= (P_t f)(x) + \int_0^t P_{t-s}\, g(s,x)\, ds \\
&= \mathbb{E}_x[f(X_t)] + \int_0^t \mathbb{E}_x[g(s, X_{t-s})]\, ds \\
&= \mathbb{E}_x[f(X_t)] + \int_0^t \mathbb{E}_x[g(t-s, X_s)]\, ds \\
&= \mathbb{E}_x\Big[f(X_t) + \int_0^t g(t-s, X_s)\, ds\Big]
\end{aligned}
$$

$\square$

Bsp. 27: Betrachte das folgende Anfangswertproblem

$$\partial_t u(t,x) = \frac{1}{2} \partial^2_{xx} u(t,x), \quad t \geq 0 \quad \text{mit} \quad u(0,x) = f(x)$$

Dann ist die Lösung gegeben durch

$$u(t,x) = \mathbb{E}_x[f(B_t)] = (2\pi t)^{-1/2} \int_{\mathbb{R}} f(y) \exp\left(-\frac{1}{2t}(x-y)^2\right) dy.$$