Frage: Läßt sich aus dem Generator die Halbgruppe in eindeutiger Weise rekonstruieren?

Satz 3.8: (Eindeutigkeit) Eine stark stetige Halbgruppe linearer Kontraktionen $(P_t)_{t\geq 0}$ ist eindeutig bestimmt durch den zugehörigen Generator $(G, D(G))$.

Beweis: Angenommen $(P_t)_{t\geq 0}$ und $(Q_t)_{t\geq 0}$ sind zwei stark stetige Halbgruppen linearer Kontraktionen auf B zum gleichen Generator $(G, D(G))$. Dann gilt für $f \in D(G)$, $0 \leq s < t < \infty$ und $0 < h \leq t-s$

$$\left\| \frac{1}{h} \left(P_{s+h} Q_{t-(s+h)} f - P_s Q_{t-s} f \right\|$$

$$= \left\| -\frac{1}{h} P_{s+h} Q_{t-(s+h)} (Q_h - I) f + \frac{1}{h} P_s (P_h - I) Q_{t-s} f \right\|$$

$$\leq \underbrace{\|P_{s+h}\|}_{\leq 1} \underbrace{\|Q_{t-(s+h)}\|}_{\leq 1} \left\| \frac{1}{h} (Q_h - I) f - Gf \right\| + \left\| (P_{s+h} - P_s) \underbrace{Q_{t-s} Gf}_{\in B_0} \right\|$$

$$+ \underbrace{\|P_{s+h}\|}_{\leq 1} \left\| \left(Q_{t-s} - Q_{t-(s+h)} \right) \underbrace{Gf}_{\in B_0} \right\| + \underbrace{\|P_s\|}_{\leq 1} \left\| \left(\frac{1}{h} (P_h - I) - G \right) \underbrace{Q_{t-s} f}_{\in D(G)} \right\|$$

Da nach Lemma 3.4 und Satz 3.5 $Gf \in B_0 \equiv B$, $Q_{t-s} B_0 \subseteq B_0$ und $Q_{t-s} f \in D(G)$ ist, folgt

$$\limsup_{h \downarrow 0} \left\| \frac{1}{h} \left(P_{s+h} Q_{t-(s+h)} f - P_s Q_{t-s} f \right) \right\| = 0$$

Somit erhält man für jedes $\varepsilon \in (0, t-s)$ und $f \in D(G) \subseteq B_0 \equiv B$

$$0 = \underset{h \downarrow 0}{s\text{-}\lim} \int_0^{t-\varepsilon} \frac{1}{h} \left(P_{s+h} Q_{t-(s+h)} f - P_s Q_{t-s} f \right) ds$$

$$= \underset{h \downarrow 0}{s\text{-}\lim} \left(\frac{1}{h} \int_{t-\varepsilon}^{t-\varepsilon+h} P_s Q_{t-s} f \, ds - \frac{1}{h} \int_0^h P_s Q_{t-s} f \, ds \right)$$

$$= P_{t-\varepsilon} Q_\varepsilon f - P_0 Q_t f \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{s} P_t f - Q_t f$$

Also ist $P_t f = Q_t f$ für alle $t \geq 0$ und $f \in D(G)$. Da aber nach Satz 3.5 a) $D(G)$ dicht in $B_0 \equiv B$ liegt, folgt die Gleichheit für alle $f \in B$.

$\square$

<u>Satz 3.9</u> (Hille-Yoshida) Sei G ein linearer Operator auf B mit Definitionsbereich $D(G)$. G ist genau dann Generator einer stark stetigen Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ linearer Kontraktionen auf B, wenn

(i) $\overline{D(G)} = B \quad (\equiv B_0)$

(ii) $(0,\infty) \subseteq \rho(G)$ und $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$, wobei R_λ die Resolvente von G ist.

Beweis: "$\Rightarrow$" Satz 3.5 a) und Satz 3.7 a) und b)

"$\Leftarrow$" Da wie in Lemma 3.6 gezeigt wurde, daß $D(G) = R_\lambda B$ ist, definiere man

$$G_\lambda f := G(\lambda R_\lambda f) = \lambda^2 R_\lambda f - \lambda f = \lambda R_\lambda G f, \quad f \in B \quad \text{(Yoshida-Approximation)}$$

Da $(0,\infty) \subseteq \rho(G)$ und $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$ folgt somit aus Lemma 3.6

$$\operatorname*{s-lim}_{\lambda\to\infty} G_\lambda f = \operatorname*{s-lim}_{\lambda\to\infty} \lambda R_\lambda G f = G f \qquad \forall f \in D(G).$$

Zudem gilt

$$\|G_\lambda\| = \|\lambda^2 R_\lambda - \lambda I\| \leq \lambda \underbrace{\|\lambda R_\lambda\|}_{\leq 1} + \lambda \leq 2\lambda < \infty ,$$

d.h. G_λ ist ein beschränkter Operator. Nach Bsp. 18 ist somit durch

$$P_t^\lambda := e^{tG_\lambda} := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (G_\lambda)^k , \qquad t \geq 0$$

eine stark stetige Halbgruppe auf B gegeben mit

$$\|P_t^\lambda\| = \| e^{-\lambda t} e^{\lambda^2 t R_\lambda} \| \leq e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^k}{k!} \underbrace{\|\lambda R_\lambda\|^k}_{\leq 1} \leq e^{-\lambda t} e^{\lambda t} = 1 ,$$

wobei hierbei im ersten Schritt benutzt wurde, daß die Operatoren $\lambda^2 R_\lambda$ und λI kommutieren. Also ist $(P_t^\lambda)_{t\geq 0}$ auch eine Halbgruppe linearer Kontraktionen.

<u>Zu zeigen:</u> $\| P_t^\lambda f - P_t^\mu f \| \leq t \, \|G_\lambda f - G_\mu f\| \quad \forall \ \lambda, \mu > 0$ und $t \geq 0$

Aus Lemma 3.6a) folgt zunächst einmal für alle $\lambda, \mu > 0$

$$G_\lambda G_\mu - G_\mu G_\lambda = (\lambda^2 R_\lambda - \lambda I)(\mu^2 R_\mu - \mu I) - (\mu^2 R_\mu - \mu I)(\lambda^2 R_\lambda - \lambda I) = (\lambda\mu)^2 (R_\lambda R_\mu - R_\mu R_\lambda) = 0$$

Daraus folgt, daß auch $P_t^\lambda P_s^\mu = P_s^\mu P_t^\lambda$ für alle $s,t \geq 0$ und $\lambda,\mu > 0$. Also

$$
\begin{aligned}
P_t^\lambda f - P_t^\mu f &= \sum_{k=1}^{n} \left(P^\lambda_{kt/n} P^\mu_{(n-k)t/n} f - P^\lambda_{(k-1)t/n} P^\mu_{(n-k+1)t/n} f \right) \\
&= \sum_{k=1}^{n} P^\lambda_{(k-1)t/n} P^\mu_{(n-k)t/n} \left(P^\lambda_{t/n} - P^\mu_{t/n} \right) f , \qquad f \in B
\end{aligned}
$$

Daraus folgt dann

$$
\begin{aligned}
&\| P_t^\lambda f - P_t^\mu f \| \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\| P^\lambda_{(k-1)t/n} \|}_{\leq 1} \underbrace{\| P^\mu_{(n-k)t/n} \|}_{\leq 1} \| P^\lambda_{t/n} f - P^\mu_{t/n} f \| \\
&\leq t \underbrace{\| \tfrac{n}{t} (P^\lambda_{t/n} f - f) - G_\lambda f \|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + t \underbrace{\| \tfrac{n}{t} (P^\mu_{t/n} f - f) - G_\mu f \|}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0} + t \| G_\lambda f - G_\mu f \|
\end{aligned}
$$

Folglich erhält man

$$
\| P_t^\lambda f - P_t^\mu f \| \leq t \, \| G_\lambda f - G_\mu f \| \qquad \forall \; t \geq 0 \text{ und } \lambda, \mu > 0
$$

Da für $f \in D(G)$ zudem gilt, daß

$$\|G_\lambda f - G_\mu f\| \xrightarrow[\lambda,\mu\to\infty]{} 0$$

ist somit P_t^λ eine gleichmäßig auf kompakta konvergente Cauchy-Folge.

Folglich existiert für alle $f \in D(G)$

$$\underset{\lambda\to\infty}{\text{s-lim}}\; P_t^\lambda f = P_t f \quad \text{gleichmäßig auf kompakta} \qquad (*)$$

Da $\|P_t^\lambda\| \leq 1$ für alle $t \geq 0$ und $\lambda > 0$ und $D(G)$ dicht in B liegt, gilt folglich

$(*)$ für alle $f \in B$.

<u>Zu zeigen</u>: $(P_t)_{t\geq 0}$ ist eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe

Für $s,t \geq 0$ und $f \in D(G)$ gilt

$$P_0 = \underset{\lambda\to\infty}{\text{s-lim}}\; P_0^\lambda = I \quad \text{und} \quad P_{s+t} = \underset{\lambda\to\infty}{\text{s-lim}}\; P_{s+t}^\lambda = \underset{\lambda\to\infty}{\text{s-lim}}\; P_s^\lambda \cdot P_t^\lambda = P_s \cdot P_t$$

Weiterhin ist

$$\|P_t\| = \lim_{\lambda\to\infty} \|P_t^\lambda\| \leq 1 .$$

Die starke Stetigkeit der Abb. $t \mapsto P_t f$, $f \in B$ folgt schließlich aus der gleichmäßigen Konvergenz stetiger Abbildungen.

Also ist $(P_t)_{t\geq 0}$ eine stark stetige Kontraktionshalbgruppe. Bezeichne mit $(H, D(H))$ den zugehörigen Generator.

<u>Zu zeigen:</u> $\quad D(G) = D(H)$ und $G = H$

Für $f \in \overline{D(G)}$, $t \geq 0$ und $\lambda > 0$ betrachte zunächst einmal

$$\| P_t^\lambda f - P_t f \| \leq \limsup_{\mu \to \infty} \| P_t^\lambda f - P_t^\mu f \| \leq \limsup_{\mu \to \infty} t \, \| G_\lambda f - G_\mu f \| = t \, \| G_\lambda f - G f \|$$

Daraus folgt für alle $\lambda > 0$

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{t} (P_t f - f) - G f \right\| &\leq \frac{1}{t} \| P_t^\lambda f - P_t f \| + \left\| \frac{1}{t} (P_t^\lambda f - f) - G_\lambda f \right\| + \| G_\lambda f - G f \| \\ &\leq \left\| \frac{1}{t} (P_t^\lambda f - f) - G_\lambda f \right\| + 2 \, \| G_\lambda f - G f \| \end{aligned}$$

Also

$$\limsup_{t \downarrow 0} \left\| \frac{1}{t} (P_t f - f) - G f \right\| \leq 2 \, \| G_\lambda f - G f \| \xrightarrow[\lambda \to \infty]{} 0$$

Folglich ist $D(G) \subseteq D(H)$ und es gilt $Gf = Hf$ für alle $f \in D(G)$.

Weiterhin ist $(0,\infty) \subseteq \rho(G)$ nach Voraussetzung und $(0,\infty) \subseteq \rho(H)$ nach Satz 3.7.

Somit erhält man für $1 \in \rho(G)$ und $1 \in \rho(H)$

$$(I-H)D(G) = (I-G)D(G) = B$$

Daraus folgt

$$D(H) = \underbrace{(I-H)^{-1}B}_{R_1(H)B} = \underbrace{(I-G)^{-1}B}_{R_1(G)B} = D(G).$$

Also ist $(G, D(G))$ der Generator der Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. $\square$

<u>Frage:</u> Gibt es ein leichter überprüfbares Kriterium anstelle von (ii), das die Rekonstruktion einer stark stetigen Halbgruppe linearer Kontraktionen aus dem Generator erlaubt?

Satz 3.10: Sei E ein kompakter Raum und G ein linearer Operator auf $C(E)$ $\left(= C_b(E) = C_0(E)\right)$ mit Definitionsbereich $D(G)$. G ist genau dann Generator einer stark stetigen, konservativen, sub-Markovschen Halbgruppe $(P_t)_{t \geq 0}$ linearer Kontraktionen auf $C(E)$, wenn

(i) $\overline{D(G)} = C(E)$ $(= B_0)$

(ii) für jedes $\lambda > 0$ und $g \in C(E)$ die Gleichung

$$\lambda f - Gf = g$$

mindestens eine Lösung in $D(G)$ besitzt

(iii) das Maximumprinzip gilt, d.h. für alle $f \in D(G)$

$$f(x_0) := \max_{x \in E} f(x) \quad \Rightarrow \quad (Gf)(x_0) \leq 0$$

(iv) $1 \in D(G)$ und $G1 = 0$

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei $(G, D(G))$ der Generator einer stark stetigen Kontraktionshalbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$. Dann folgt (i) aus Satz 3.5 a). Weiterhin ergibt sich aus Satz 3.7, daß $(0,\infty) \subseteq \rho(G)$ und (wegen Lemma 3.6) ist $D(G) \ni f = R_\lambda g$ für $g \in C(E)$. Also

$$\lambda f - Gf = (\lambda I - G) R_\lambda g = g,$$

d.h. (ii) gilt. Um (iii) zu zeigen wähle für $f \in D(G)$ ein $x_0 \in E$ so, daß

$$f(x_0) = \max_{x \in E} f(x)$$

Dann ist $g := f(x_0)\mathbb{1} - f \geqslant 0$ und für jedes $h > 0$ ergibt sich

$$0 \leq P_h g = f(x_0) \underbrace{P_h \mathbb{1}}_{=\mathbb{1}} - P_h f = f(x_0) - P_h f \quad \Leftrightarrow \quad f(x_0) \geq P_h f$$

Daraus folgt

$$(Gf)(x_0) = \lim_{h \downarrow 0} \frac{1}{h} \left(P_h f(x_0) - f(x_0) \right) \leq 0$$

(iv) Aus $\left\| \frac{1}{t} (P_t \mathbb{1} - \mathbb{1}) \right\| = \left\| \frac{1}{t} (\mathbb{1} - \mathbb{1}) \right\| = 0$, folgt $\mathbb{1} \in D(G)$ und $G\mathbb{1} = 0$

"$\supseteq$" Im folgenden sollen die Voraussetzungen des Satz 3.9 überprüft werden.

<u>Zu zeigen</u>: $\lambda f - Gf = 0 \Rightarrow f = 0 \quad \forall \lambda > 0$

Für $\lambda > 0$ sei nun $f \in D(G)$ eine Lösung der Gleichung $\lambda f - Gf = 0$. Angenommen $f \neq 0$. O.B.d.A existiert dann ein $x_0 \in E$ mit $f(x_0) = \max_{x \in E} f(x) > 0$ (andernfalls betrachte $-f$). Dann folgt aus dem Maximumsprinzip

$$0 < \lambda f(x_0) = (Gf)(x_0) \leq 0 \qquad ↯$$

Folglich besitzt die Gleichung $\lambda f - Gf = 0$ nur die triviale Lösung $f = 0$, d.h. $R_\lambda = (\lambda I - G)^{-1}$ existiert für jedes $\lambda > 0$.

<u>Zu zeigen</u>: $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1 \quad \forall \lambda > 0$

Für $g \in C(E)$ und $\lambda > 0$ setze $f := R_\lambda g$. Dann ist $f \in D(G)$ und es gilt

$$(\lambda I - G) f = (\lambda I - G) R_\lambda g = g$$

O.B.d.A sei $\|f\|_\infty = \max_{x \in E} f(x) = f(x_0)$ (andernfalls betrachte $-f$). Aus dem Maximumsprinzip folgt dann

$$\|\lambda R_\lambda g\|_\infty = \|\lambda f\|_\infty = \underbrace{\lambda f(x_0) - (Gf)(x_0)}_{g(x_0)} + \underbrace{(Gf)(x_0)}_{\leq 0} \leq g(x_0) \leq \|g\|_\infty$$

Also ist $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$.

Somit ergibt sich aus dem Satz von Hille-Yoshida die Existenz einer stark stetigen Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$ linearer Kontraktionen auf $C(E)$.

<u>Zu zeigen:</u> $P_t 1 = 1 \quad \forall t \geq 0$

Da nach (iv) $1 \in D(G)$ und $G1 = 0$, ergibt sich somit für jedes $\lambda > 0$

$$(\lambda I - G)1 = \lambda 1 - \underbrace{G1}_{=0} = \lambda 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda R_\lambda 1 = 1$$

Insbesondere gilt dann auch für die Yoshida-Approximation von G

$$G_\lambda 1 = \lambda^2 R_\lambda 1 - \lambda 1 = \lambda 1 - \lambda 1 = 0$$

Also,

$$P_t 1 = \text{s-}\lim_{\lambda\to\infty} P_t^\lambda 1 = \text{s-}\lim_{\lambda\to\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (G_\lambda)^k 1 = 1$$

<u>Zu zeigen:</u> $0 \leq P_t f \leq 1$ für alle $0 \leq f \leq 1$

Sei nun zunächst $f \geq 0$.

<u>Beh.:</u> $g := R_\lambda f \geq 0 \quad \forall \lambda > 0$

Angenommen dies ist nicht der Fall. Dann gibt es ein $x_0 \in E$ mit

$$g(x_0) = \min_{x\in E} g(x) < 0$$

Aus dem Maximumsprinzip folgt nun

$$0 > \lambda g(x_0) = (\lambda I - G) g(x_0) + (Gg)(x_0) = f(x_0) - \underbrace{(G(-g))(x_0)}_{\leq 0} \geq f(x_0) \geq 0 \quad ↯$$

Somit ist $R_\lambda f \geq 0$.

Mittels der Yoshida-Approximation erhält man nun

$$P_t f = \underset{\lambda \to \infty}{s\text{-}\lim}\; e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (\lambda^2 R_\lambda)^k f \geq 0 \qquad , \quad t \geq 0$$

Sei nun $f \leq 1$. Setze $\hat{f} := 1 - f \geq 0$. Dann folgt für alle $t \geq 0$

$$0 \leq P_t \hat{f} = \underbrace{P_t 1}_{=1} - P_t f = 1 - P_t f \quad \Longleftrightarrow \quad P_t f \leq 1$$

Zu zeigen: $\quad P_t f_n \downarrow 0$ für $(f_n) \subseteq C(E)$ mit $f_n \downarrow 0$

Dies folgt aus Satz 3.3 und Satz 3.1. $\square$

Bem.:

$$(X_t)_{t\geq 0} \text{ Markovprozeß} \;\underset{\text{Satz 2.6}}{\overset{\text{Satz 2.8}}{\rightleftarrows}}\; P(t,x,A) \;\underset{\text{Satz 3.1}}{\overset{\text{Satz 3.3}}{\rightleftarrows}}\; (P_t)_{t\geq 0} \;\underset{\text{Satz 3.5}}{\overset{\text{Satz 3.10}}{\rightleftarrows}}\; (G, D(G))$$

<u>Bsp 23</u>: (Reflektierte Brownsche Bewegung auf $[0,1]$) Betrachte auf $E=[0,1]$ den folgenden linearen Operator

$$D(G) = \{ f \in C^2([0,1]) : f'(0) = f'(1) = 0 \}, \quad G = \frac{1}{2} f'' \quad \text{für } f \in D(G).$$

Im folgenden gilt es die Voraussetzungen (i)-(iv) aus Satz 3.10 zu überprüfen.

(i) Da $D(G)$ ein linearer Raum ist und für $f,g \in D(G)$

$$(f\cdot g)'(0) = (f\cdot g)'(1) = 0$$

ist folglich auch $f\cdot g \in D(G)$. Zudem ist die Funktion

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \in D(G)$$

streng monoton wachsend auf $[0,1]$. Also besitzt $D(G)$ die Eigenschaft Punkte aus $[0,1]$ zu trennen. Weiterhin gehören die konstanten Funktionen zu $D(G)$. Daher folgt aus dem Satz von Stone-Weierstrass, daß

$D(G)$ dicht in $C([0,1])$ liegt.

(ii) Für alle $\lambda > 0$ und $g \in C([0,1])$ besitzt die DGL

$$-\frac{1}{2} f'' + \lambda f = g \qquad \text{mit} \quad f'(0) = f'(1) = 0$$

die folgende Lösung

$$f(x) = -\frac{2}{\sqrt{2\lambda}} \int_0^x g(y) \sinh\left(\sqrt{2\lambda}\,(x-y)\right) dy + k \cosh\left(\sqrt{2\lambda}\, x\right)$$

mit

$$k = \frac{2}{\sqrt{2\lambda}\, \sinh(\sqrt{2\lambda})} \int_0^1 g(y) \cosh\left(\sqrt{2\lambda}\,(1-y)\right) dy$$

Also besitzt die Gleichung $\lambda f - Gf = g$ mindestens eine Lösung in $D(G)$.

(iii) Im folgenden soll das Maximumsprinzip überprüft werden. Sei also

für $f \in D(G)$ $x_0 \in [0,1]$ so gewählt, daß $f(x_0) = \max\limits_{x \in E} f(x)$ ist

Für $x_0 \in (0,1)$ folgt dann

$$(Gf)(x_0) = \frac{1}{2} f''(x_0) \leq 0 \qquad (f \text{ besitzt in } x_0 \text{ ein Maximum})$$

Für $x_0 \in \{0,1\}$ folgt aus der Randbedingung, daß $f'(x_0) = 0$.

Mittels Taylorentwicklung erhält man im Falle $x_0 = 0$ ($x_0 = 1$ geht analog)

$$f(0) \geq f(x) = f(0) + \underbrace{f'(0)}_{=0} x + \frac{1}{2} f''(\vartheta x) x^2 \quad , \quad \vartheta \in [0,1]$$

Also $f''(\vartheta x) \leq 0$. Da f'' stetig ist, ergibt sich somit

$$f''(0) = \lim_{x \downarrow 0} f''(\vartheta x) \leq 0 \quad \Rightarrow \quad (Gf)(0) \leq 0$$

(iv) $\mathbb{1} \in D(G)$ und $G\mathbb{1} = 0$ ist trivial.

<u>Aufgabe:</u> Auf $E = [0,1]$ betrachte den folgenden Operator

$$D(G) = C^2([0,1]) \quad , \quad Gf = \frac{1}{2} x(1-x) f'' \quad \text{für } f \in D(G)$$

Zeige, daß ein Markovprozeß $(X_t)_{t \geq 0}$ existiert, dessen zugehörige Halbgruppe den obigen Generator $(G, D(G))$ besitzt. Dieser Markovprozeß wird auch Wright-Fisher Diffusion genannt.