3.3 Halbgruppen linearer Operatoren und Resolventen

Frage: Wie kann man den Definitionsbereich eines Generators alternativ charakterisieren?

Definition (Resolventenmenge, Spektrum)

Sei A ein abgeschlossener Operator auf einem Banachraum $\mathcal{B}$ mit Definitionsbereich $D(A)$. Dann bezeichnet

$$\rho(A) := \{ \lambda \in \mathbb{R} : (\lambda I - A)^{-1} \text{ existiert und ist ein beschränkter, linearer Operator} \}$$

die Resolventenmenge von A. Die Menge $\sigma(A) := \mathbb{R} \setminus \rho(A)$ heißt Spektrum von A.

Bem.: (i) Falls $\mathcal{B}$ ein komplexer Vektorraum ist, so werden werden in der Definition von $\rho(A)$ alle $\lambda \in \mathbb{C}$ anstelle $\lambda \in \mathbb{R}$ betrachtet.

(ii) Da A abgeschlossen ist, braucht die Beschränktheit von $(\lambda I - A)^{-1}$ nicht explizit gefordert werden.

(iii) $\rho(A)$ ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{R}$, während $\sigma(A)$ abgeschlossen ist.

Definition (Resolvente)

Sei A ein abgeschlossener Operator auf B mit Definitionsbereich $\mathcal{D}(A)$. Für $\lambda \in \varrho(A)$ heißt der Operator

$$R_\lambda := R_\lambda(A) := (\lambda I - A)^{-1}$$

Resolvente von A.

Lemma 3.6

Sei $(A, \mathcal{D}(A))$ ein abgeschlossener Operator auf B. Dann gilt

a) $$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\lambda R_\mu \quad \forall \lambda, \mu \in \varrho(A) \quad \text{(Resolventenidentität)}$$

Insbesondere ist $R_\lambda R_\mu = R_\mu R_\lambda$ für alle $\lambda, \mu \in \varrho(A)$

b) Das Bild von R_λ ist unabhängig von $\lambda \in \varrho(A)$, d.h. $R_\lambda B = R_\mu B \;\; \forall \lambda, \mu \in \varrho(A)$

Zudem ist $R_\lambda B = \mathcal{D}(A)$.

c) Falls $(0, \infty) \subseteq \varrho(A)$ und $\|\lambda R_\lambda\| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$, so gilt

$$\overline{R_\lambda B} = \left\{ f \in B : \; \lambda R_\lambda f \xrightarrow[\lambda \to \infty]{s} f \right\}$$

Beweis: a) Für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ ergibt sich

$$R_\lambda = R_\lambda(\mu I - A)R_\mu = R_\lambda\big((\lambda I - A) + (\mu - \lambda)I\big)R_\mu = R_\mu + (\mu - \lambda)R_\lambda R_\mu$$

Insbesondere gilt, daß für $\lambda, \mu \in \rho(A)$ mit $\lambda \neq \mu$

$$R_\lambda R_\mu = (\mu - \lambda)^{-1}(R_\lambda - R_\mu) = (\lambda - \mu)^{-1}(R_\mu - R_\lambda) = R_\mu R_\lambda .$$

b) Zu zeigen: $R_\lambda B = R_\mu B \quad \forall\, \lambda, \mu \in \rho(A)$

Sei also nun $f \in R_\mu B$. Dann gibt es ein $g \in B$ mit $f = R_\mu g$. Setze nun

$$h := g + (\lambda - \mu) R_\mu g$$

Dann ergibt sich aus der Resolventenidentität $R_\mu = R_\lambda + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu$

$$R_\lambda h = R_\lambda g + (\lambda - \mu) R_\lambda R_\mu g = R_\mu g = f$$

Also ist $R_\mu B \subseteq R_\lambda B$. Durch das Vertauschen der Rollen von λ und μ folgt schließlich, daß $R_\mu B = R_\lambda B$.

Zu zeigen: $R_\lambda B = D(A)$

Sei nun $f \in R_\lambda B$. Dann existiert ein $g \in B$ mit $f = R_\lambda g$. Damit folgt dann aber

$$Af = AR_\lambda g = \lambda R_\lambda g - (\lambda I - A) R_\lambda g = \lambda R_\lambda g - g,$$

d.h. $f \in D(A)$. Somit ist $R_\lambda B \subseteq D(A)$.

Andererseits erhält man für $f \in D(A)$ und $g := \lambda f - Af$, daß

$$R_\lambda g = \lambda R_\lambda f - R_\lambda Af = R_\lambda (\lambda I - A) f = f,$$

d.h. $f \in R_\lambda B$ und $D(A) \subseteq R_\lambda B$. Also gilt $R_\lambda B = D(A)$.

c) Nach Voraussetzung gelte, daß $(0,\infty) \subseteq \rho(A)$ und $\| \lambda R_\lambda \| \leq 1$ für alle $\lambda > 0$.

Setze $\mathcal{D} := \{ f \in B : \operatorname*{s-lim}_{\lambda \to \infty} \lambda R_\lambda f = f \}$.

Zu zeigen: $R_\lambda B \subseteq \mathcal{D}$

Für $f \in R_\mu B$ gibt es zunächst einmal ein $g \in B$ mit $f = R_\mu g$, $\mu > 0$.

Aus der Resolventenidentität ergibt sich nun für alle $\lambda > \mu$

$$\lambda R_\lambda f - f = \lambda R_\lambda R_\mu g - R_\mu g = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}(R_\lambda - R_\mu)g - R_\mu g = \frac{\mu}{\lambda - \mu} R_\mu g - \frac{\lambda}{\lambda - \mu} R_\lambda g$$

Also,

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \| \lambda R_\lambda f - f \| \leq \limsup_{\lambda \to \infty} \left(\frac{1}{\lambda - \mu} \underbrace{\| \mu R_\mu \|}_{\leq 1} \| g \| + \frac{1}{\lambda - \mu} \underbrace{\| \lambda R_\lambda \|}_{\leq 1} \| g \| \right) = 0,$$

d.h. $R_\lambda B \subseteq D$.

Zu zeigen: $\overline{R_\lambda B} \subseteq D$

Sei also $f \in \overline{R_\lambda B}$. Dann existiert $(f_n) \subseteq R_\lambda B$ mit $f_n \xrightarrow{s} f$. Zudem gilt

$$\| \lambda R_\lambda f - f \| \leq \| \lambda R_\lambda f_n - f_n \| + \| f_n - f \| + \underbrace{\| \lambda R_\lambda \|}_{\leq 1} \| f_n - f \| \leq \| \lambda R_\lambda f_n - f_n \| + 2 \| f_n - f \|$$

Da aber $R_\lambda B \subseteq D$ ist, folgt somit

$$\limsup_{\lambda \to \infty} \| \lambda R_\lambda f - f \| \leq 2 \| f_n - f \| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \Rightarrow \quad f \in D$$

Dass $D \subseteq \overline{R_\lambda B}$ ist, folgt aus der Definition von D. $\square$

Definition (Resolvente einer linearen Kontraktion)

Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf B mit zugehörigem Generator $(G, D(G))$. Dann heißt die Resolvente $R_\lambda(G)$, $\lambda \in \varrho(G)$ von G in B_0 auch die Resolvente der Halbgruppe $(P_t)_{t\geq 0}$.

Satz 3.7: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ eine Kontraktionshalbgruppe auf B und bezeichne mit $(G, D(G))$ den zugehörigen Generator.

a) Für alle $\lambda > 0$ existiert die Resolvente von G auf B_0 und ist gleich der Laplace-transformierten L_λ von $(P_t)_{t\geq 0}$, d.h. für alle $f \in B_0$ und $\lambda > 0$

$$R_\lambda f = L_\lambda f := \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s f \, ds.$$

Insbesondere ist $\| \lambda R_\lambda f \| \leq \| f \|$ für alle $f \in B_0$ und $\lambda > 0$

b) $\overline{R_\lambda B_0} = B_0$

__Beweis:__ a) Zunächst einmal ist L_λ für jedes $\lambda > 0$ wohldefiniert, denn für alle $t > 0$ und $f \in B_0$ gilt

$$\left\| \int_0^t e^{-\lambda s} P_s f \, ds \right\| \leq \int_0^t e^{-\lambda s} \|P_s f\| \, ds \leq \int_0^\infty e^{-\lambda s} \underbrace{\|P_s\|}_{\leq 1} \|f\| \, ds = \frac{1}{\lambda} \|f\|$$

Insbesondere ist $\|L_\lambda f\| \leq \frac{1}{\lambda} \|f\|$ für alle $\lambda > 0$.

__Zu zeigen:__ $R_\lambda = L_\lambda$ auf B_0 für alle $\lambda > 0$

Für ein festes $\lambda > 0$ betrachte die Familie $(P_t^\lambda)_{t \geq 0}$ mit $P_t^\lambda f := e^{-\lambda t} P_t f$.

Wie in der Aufgabe nach Bsp. 13 gezeigt wurde ist $(P_t^\lambda)_{t \geq 0}$ auf B_0 eine stark stetige Halbgruppe linearer Kontraktionen mit Generator $G^\lambda = G - \lambda I$. Aus Satz 3.5 folgt für jedes $t > 0$ und $f \in B_0$

$$e^{-\lambda t} P_t f - f = P_t^\lambda f - f = G^\lambda \int_0^t P_s^\lambda f \, ds = (G - \lambda I) \int_0^t e^{-\lambda s} P_s f \, ds$$

Da $\|P_t\| \leq 1$, konvergiert folglich $\|e^{-\lambda t} P_t f\| = e^{-\lambda t} \|P_t f\| \leq e^{-\lambda t} \|f\| \xrightarrow[t \to \infty]{} 0$.

Daher erhält man

$$f = (\lambda I - G) \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s f \, ds = (\lambda I - G) L_\lambda f$$

Somit ist L_λ die rechtsseitige Inverse von $(\lambda I - G)$.

Sei nun $f \in D(G)$. Dann gilt

$$L_\lambda G f = \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_s G f \, ds = \int_0^\infty e^{-\lambda s} \frac{d}{ds} P_s f \, ds = \underbrace{e^{-\lambda s} P_s f \Big|_0^\infty}_{= -f} - \int_0^\infty (-\lambda) e^{-\lambda s} P_s f \, ds$$

$$= -f + \lambda L_\lambda f$$

Also, $f = L_\lambda (\lambda I - G) f$. Folglich ist L_λ auch die linksseitige Inverse von $(\lambda I - G)$. Schließlich erhält man somit auch für alle $f \in B_0$

$$\| \lambda R_\lambda f \| = \| \lambda L_\lambda f \| \leq \| f \|.$$

b) <u>Zu zeigen:</u> $R_\lambda B_0 \subseteq B_0$

Sei also $f \in R_\lambda B_0$. Dann gibt es ein $g \in B_0$ mit $f = R_\lambda g$. Weiterhin gilt

$$P_t R_\lambda g = P_t L_\lambda g = \int_0^\infty e^{-\lambda s} P_{s+t} g \, ds = e^{\lambda t} R_\lambda g - e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} P_s g \, ds .$$

Daraus folgt dann aber

$$\| P_t f - f \| = \| P_t R_\lambda g - R_\lambda g \|$$

$$\leq (e^{\lambda t} - 1) \| R_\lambda g \| + e^{\lambda t} \int_0^t e^{-\lambda s} \underbrace{\| P_s g \|}_{\leq \| g \|} ds \leq \frac{2}{\lambda} (e^{\lambda t} - 1) \xrightarrow[t \downarrow 0]{} 0$$

Also ist $f \in B_0$.

<u>Zu zeigen</u>: $\overline{R_\lambda B} = B_0$

Für ein beliebiges $f \in B_0$ definiere $f_n = n R_n f$, $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $f_n \in R_\lambda B$.

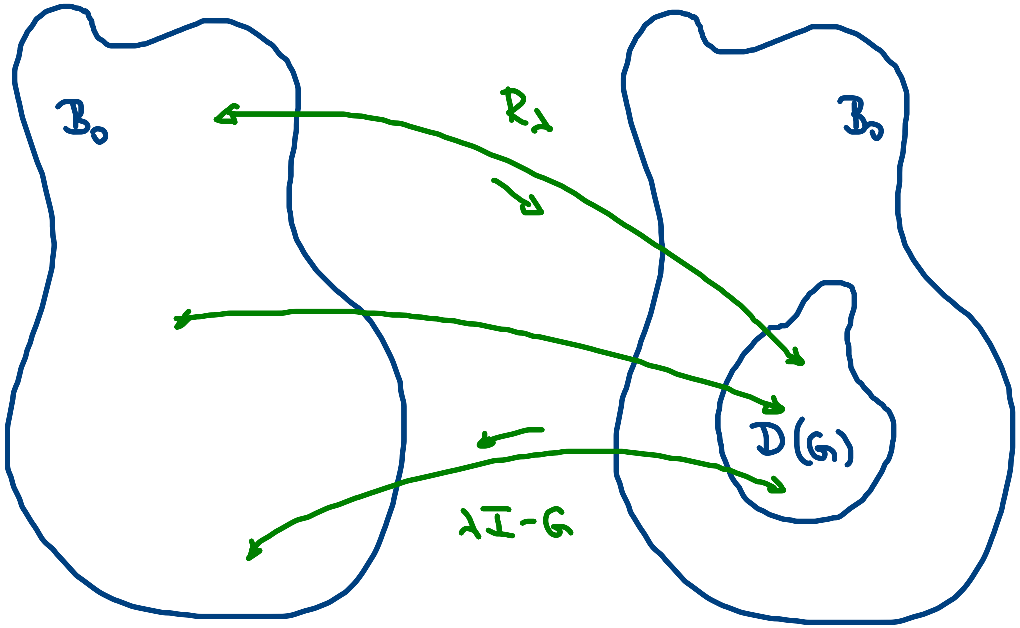
Weiterhin gilt

$$\| f_n - f \| = \| n R_n f - f \| = \| n L_n f - f \| = \| \int_0^\infty n e^{-nt} (P_t f - f) \, dt \|$$

$$\leq \int_0^\infty e^{-s} \underbrace{\| P_{s/n} f - f \|}_{\xrightarrow[n \to \infty]{} 0} ds \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\square$

Bem.: Aus dem Beweis von Satz 3.7 und Lemma 3.6 folgt, daß der auf B_0 eingeschränkte Operator R_λ (bzw. L_λ) die Umkehrung des auf $D(G)$ definierten Operators $(\lambda I - G)$ ist



Aufgabe: Sei $(P_t)_{t\geq 0}$ die zur Brownschen Übergangsfunktion auf $\mathbb{R}$ gehörende Halbgruppe. Zeige für $f \in B(\mathbb{R})$ und $\lambda > 0$

$$R_\lambda f(x) = \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp\left(-\sqrt{2\lambda}\,|x-y|\right) dy .$$

Bsp. 22: Im folgenden soll der Generator der 1-dimensionalen Brownschen Bewegung auf $C_0(\mathbb{R})$ mittels der Resolvente bestimmt werden. Aus Lemma 3.6 folgt hierbei für jedes $\lambda > 0$

$$D(G) = \{R_\lambda g : g \in C_0(\mathbb{R})\} \quad \text{und} \quad Gf = \lambda f - R_\lambda^{-1} f$$

Betrachte nun für $g \in C_0(\mathbb{R})$

$$f(x) = R_\lambda g(x) = \int_{\mathbb{R}} g(y) \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} \exp(-\sqrt{2\lambda}\,|x-y|)\, dy$$

$$= \frac{e^{-\sqrt{2\lambda}\,x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{-\infty}^{x} g(y)\, e^{\sqrt{2\lambda}\,y}\, dy + \frac{e^{\sqrt{2\lambda}\,x}}{\sqrt{2\lambda}} \int_{x}^{\infty} g(y)\, e^{-\sqrt{2\lambda}\,y}\, dy$$

Dann ist $f \in C_0(\mathbb{R})$. Desweiteren ist f zweimal stetig differenzierbar mit

$$f'(x) = -e^{-\sqrt{2\lambda}\,x} \int_{-\infty}^{x} g(y)\, e^{\sqrt{2\lambda}\,y}\, dy + e^{\sqrt{2\lambda}\,x} \int_{x}^{\infty} g(y)\, e^{-\sqrt{2\lambda}\,y}\, dy$$

$$f''(x) = \sqrt{2\lambda}\, e^{-\sqrt{2\lambda}\,x} \int_{-\infty}^{x} g(y)\, e^{\sqrt{2\lambda}\,y}\, dy + \sqrt{2\lambda}\, e^{\sqrt{2\lambda}\,x} \int_{x}^{\infty} g(y)\, e^{-\sqrt{2\lambda}\,y}\, dy - 2g(x)$$

Also,

$$f''(x) = 2\left(\lambda R_\lambda g(x) - g(x)\right) = 2\left(\lambda f(x) - g(x)\right) \in C_0(\mathbb{R})$$

Daraus folgt

$$D(G) \subseteq \{ f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}) : f'' \in C_0(\mathbb{R}) \}$$

$$\frac{1}{2} f'' = \lambda f - g = \lambda f - R_\lambda^{-1} f = Gf \quad \Leftrightarrow \quad Gf = \frac{1}{2} f''$$

Betrachte nun für $f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R})$ mit $f'' \in C_0(\mathbb{R})$ die Funktion

$$g := R_\lambda\left(\lambda f - \frac{1}{2} f''\right) \in R_\lambda C_0(\mathbb{R})$$

Setze nun $h = f - g$. Dann gilt

$$\lambda h - \frac{1}{2} h'' = \lambda f - \frac{1}{2} f'' - (\lambda I - G) R_\lambda \left(\lambda f - \frac{1}{2} f''\right) = 0$$

Da diese DGL für alle $\lambda > 0$ gelten soll, ist folglich $h = 0$ die einzige Lösung, d.h. $f = g = R_\lambda\left(\lambda f - \frac{1}{2} f''\right) \Rightarrow f \in R_\lambda C_0(\mathbb{R}) = D(G)$

Somit ist $D(G) = \{ f \in C_0(\mathbb{R}) \cap C^2(\mathbb{R}) : f'' \in C_0(\mathbb{R}) \}$.